

④ Espaces vectoriels

I Somme directe - Décomposition en somme directe:

1 Somme directe:

$$\sum_{k=1}^n F_k \text{ somme directe} \Leftrightarrow F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0 \text{ alors } x_1 = \dots = x_n = 0$$

2 Décomposition en somme directe:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_k \text{ somme directe} \\ \sum_{k=1}^n F_k = F \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n F_k \text{ somme directe} \\ \dim(F) = \dim(\sum_{k=1}^n F_k) \end{array} \right\} \Leftrightarrow F = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

$$F = \bigoplus_{k=1}^n F_k \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n \text{ alors } x_i = y_i; i \leq n$$

II Famille de vecteurs:

$$\Phi = \{u_1, \dots, u_n\} \text{ famille de vecteurs.}$$

1 Famille libre:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \text{ alors } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0. \Leftrightarrow \Phi \text{ libre.}$$

$$\begin{cases} \{u\} \text{ libre} \Leftrightarrow u \neq 0 \\ \Phi_1 \text{ et } \Phi_2 \text{ libre} \Rightarrow \Phi_1 \cup \Phi_2 \text{ libre} \\ \Phi \text{ libre et } \alpha \neq 0 \Rightarrow \Phi \cup \{\alpha\} \text{ libre} \end{cases}$$

2 Famille génératrice de E:

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k; \forall x \in E \Leftrightarrow \Phi \text{ génératrice de } E$$

$$\begin{cases} \Phi \text{ génératrice de } E \Leftrightarrow E = \text{vect}(\Phi) \\ \{u\} \text{ génératrice de } E \Leftrightarrow E = \text{vect}(u) = \mathbb{R} \cdot u \end{cases}$$

3 Base de E:

$$\Phi \text{ libre et génératrice} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi \text{ libre (ou génératrice)} \\ \dim(\Phi) = \dim(E) \end{cases} \Leftrightarrow \Phi \text{ base de } E$$

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m \left\{ \begin{array}{l} \Phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \text{ base adaptée de } E \\ \phi_k \text{ base de } E_k \end{array} \right.$$

III Applications linéaires:

$$\text{Soit } B = (u_1, \dots, u_m) \text{ base de } E$$

1 f injective:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) &= \{0\} \\ \Leftrightarrow f(B) &= (f(u_1), \dots, f(u_m)) \text{ lib.} \end{aligned}$$

2 f surjective:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Im}(f) &= f(E) \\ \Leftrightarrow f(B) &= (f(u_1), \dots, f(u_m)) \text{ génératrice de } E \end{aligned}$$

3 f bijective:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f \text{ injective et surjective. (si } \dim(E) = m) \\ \Leftrightarrow f \text{ injective ou surjective (si } \dim(E) = m) \\ \Leftrightarrow f(B) = (f(u_1), \dots, f(u_m)) \text{ base de } E. \end{aligned}$$

4 Noyau - Image - Théorème du rang:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{x \in E; f(x) = 0\} \\ \text{Im}(f) &= \{f(u); u \in E\} \\ \Rightarrow \text{Im}(f) &= f(E) = f(\text{vect}(B)) = \text{vect}(f(B)) \\ * \text{ Le noyau est } \Delta: \text{Ker}(f) &\subseteq \text{Ker}(g \circ f) \\ * \text{ L'image est } \wedge: \text{Im}(g \circ f) &\subseteq \text{Im}(g) \\ * \text{ Théorème du rang: } \dim(E) &= \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) \\ * \text{ Calcul de } \text{rg}(f): \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ① \text{rg}(f) &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) \\ ② \text{rg}(f) &= \dim(B); B \text{ base de } \text{Im}(f) \\ ③ \text{rg}(f) &= \dim(f(B)); B \text{ base de } \text{Im}(f) \end{aligned}$$

5 Isomorphisme - Endomorphisme - Automorphisme:

$$\begin{aligned} * f \in \mathcal{L}(E) &\Rightarrow \text{endomorphisme.} \\ * f \in \mathcal{L}(E); \text{ bijective} &\Rightarrow \text{automorphisme.} \\ * f \in \mathcal{L}(E, F); \text{ bijective} &\Rightarrow \text{isomorphisme.} \end{aligned}$$

6 Comparaison des applications:

① f = g:

$$\begin{aligned} * \forall x \in E: f(x) &= g(x) \\ * \forall e_k \in B: f(e_k) &= g(e_k) \end{aligned}$$

② f = 0:

$$\begin{aligned} * \text{Ker}(f) &= E \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = 0 \\ * \forall e_k \in B: f(e_k) &= 0. \end{aligned}$$

7 Projection et Symétrie: (E = F ⊕ G)

$$* p \text{ projection de } E \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \mathcal{L}(E) \\ p \circ p = p \end{cases} \Rightarrow z = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$$

$$* \text{symétrique de } E \Leftrightarrow \begin{cases} s \in \mathcal{L}(E) \\ s \circ s = \text{id}_E \end{cases} \Rightarrow E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id})$$

$$P_F(x) = x_F; P_G(x) = x_G$$

$$A_F(x) = x_F - x_G; P_G(x) = x_G - x_F$$

② Matrices

① Généralités:

① Base canonique de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$:

* $B_C = \{ \underbrace{E_{11}, \dots, E_{1p}}_{p \text{ colonnes}}, \underbrace{E_{m1}, \dots, E_{mn}}_{m \text{ lignes}} \}$ orla B_C de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$

* $\text{Card}(B_C) = mp \Rightarrow \dim(\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})) = mp$

② Produit matriciel:

* $C = AB \rightarrow C = (c_{ij}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$

• Propriétés:

- * $ABC = (AB)C = A(BC)$
- * $AB \neq BA$
- * $AB = O_m \nRightarrow A = O_m \text{ ou } B = O_m$
- * $AB = AC \text{ et } A \neq O_m \nRightarrow B = C$

• Binôme de Newton: Si $AB = BA$ alors:

* $(A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$
 * $A^m - B^m = (A+B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-k-1}$

③ Matrices particulières:

- Diagonale: $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- Scalaire: $M = d \cdot \text{diag}(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = d I_m$
- Nilpotente: $M^p = O_m$ et $M^{p-1} \neq O_m$

④ Matrices inversibles: $GL_n(\mathbb{R})$

- * $M \in GL_m(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) : AB = BA = I_m$
- $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$
- $\Leftrightarrow \text{rg}(M) = m \Leftrightarrow \text{Im}(M) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \text{Ker}(M) = \{0\}$
- $\Leftrightarrow M = X \cdot Y$ admet une inverse à gauche.
- $\Leftrightarrow f$ bijective / $\text{mat}(f) = M$.

$0 \notin GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas v.

• Propriétés:

- * $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- * $A \in GL_m \Rightarrow A^k \in GL_m$
- * $A \in GL_m \Rightarrow {}^t A \in GL_m$
- * $\left. \begin{matrix} AB = AC \\ A \in GL_m \end{matrix} \right\} B = C$

• Calcul de A^{-1} :

- ① $A = \text{diag}(\lambda_k) \rightarrow A^{-1}$
- ② $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- ③ $Ax = y \Rightarrow x = A^{-1}y$
- ④ Pinet de Gauss:
 $A \rightarrow I_n$
 $I_n \rightarrow A^{-1}$

① Trans et homopée:

Trans

- * $\text{tr}(A) = \text{tr}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^m a_{ii}$
- * $\text{tr}(dA + b) = d \text{tr}(A) + \text{tr}(b)$
- * $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- * $A \text{ est tel tel } b \rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(b)$
- * $\text{rg}(\text{tr}(A)) = 1$

Transposé.

- * ${}^t A = (a_{ji}) = (a_{ij})^t$
- * ${}^t(\alpha A + b) = \alpha {}^t A + {}^t b$
- * ${}^t(AB) = ({}^t B)^t A$
- * ${}^t A = A \rightarrow A \in S(E)$
- * ${}^t A = -A \rightarrow A \in A(E)$

① $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$:

* $C = AB \rightarrow C = (c_{ij}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$
 * $D = BA \rightarrow D = (d_{ij}) = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$
 * $\therefore (c_{ii}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{ki}$ et $(d_{ii}) = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{ki}$
 $\rightarrow \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(D)$

② Calcul $\text{tr}({}^t AA)$:

${}^t AA = \sum_{k=1}^m a_{ki} a_{kj}$
 $\rightarrow \text{tr}({}^t AA) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ki} a_{ki} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (a_{ki})^2$

③ Matrices de passage - Matrices orthogonales:

$B_E = (e_1, \dots, e_p)$ base de E ; $B_F = (u_1, \dots, u_m)$ base de F .

① Définition:

$\text{mat}_{B_E B_F}(f) = \text{mat}_{B_F}(f(B_E)) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_p) \end{pmatrix}_{u_1 \dots u_m}$
 $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \rightarrow \text{mat}(u, B_E) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}_{e_1 \dots e_p}$

② Matrices de passage:

* $P = \text{mat}_{B_E}(B_F) = P_{B_E \rightarrow B_F}$
 * P inversible avec $P^{-1} = P_{B_F \rightarrow B_E}$
 * $\left. \begin{matrix} X_E = \text{mat}(u, B_E) \\ X_F = \text{mat}(u, B_F) \\ P = P_{B_E \rightarrow B_F} \end{matrix} \right\} X_E = P \cdot X_F$

③ Matrices orthogonales:

A orthogonale $\Leftrightarrow D \Rightarrow \exists P$ inversible; $P^{-1}AP = D$

$\Rightarrow$ même tr ; $\det$; rg ; $f(x)$

④ Matrices projection P et matrice S : $B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E

$P = \begin{pmatrix} I_n(P) & K_2(P) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}_{e_1 \dots e_p}$, $S = \begin{pmatrix} K_2(P+I) & K_2(P-I) \\ (0) & (-1 \dots -1) \end{pmatrix}_{e_1 \dots e_p}$

I) Calcul de Déterminant:

① Méthode 1: Faire apparaître des 0 sur la ligne ou colonne qu'on va développer.

② Méthode 2: Facteur commun:

$$\det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ x+3 & x+1 \end{vmatrix} \underset{L_1 - L_2 + L_2}{=} \begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-4)$$

③ $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$

II) Propriétés du déterminant:

① $\det(M) \neq 0 \iff$ Inversible.

② $\det(AM) = \det(A) \det(M)$

③ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

④ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

⑤ $\det({}^t A) = \det(A)$

⑥ Après n permutation: $\det = (-1)^n \det(M)$

⑦ Après ajout de ligne / colonne: $\det$ change pas.

④ Systèmes différentiels linéaires.

I) Equations différentielles:

① 1^{er} ordre:

(E): $y'(t) + ay(t) = b$

$y_H(t) = Ke^{-at}$

$y_P(t) = K(t) \cdot e^{-at}$; on cherche $K(t)$ par variation de cte.

② 2^{es} ordre:

(E): $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c$.

• Solution Homogène:

$\Delta > 0$:

$y_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$

$\Delta = 0$:

$y_H(t) = (A + B \cdot t) e^{\lambda t}$

$\Delta < 0$: $\lambda = \alpha + i\beta$

$y_H(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$

• Solution particulière:

$\star c(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$

• si ω n'est pas de (E): $y_P(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$

• si ω est racine de (E): $y_P(t) = t(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$

$\star c(t) = P(t) e^{\lambda t}$

$y_P(t) = P(t) e^{\lambda t}$

avec $\deg(P) = \deg(f)$ si λ n'est pas racine

$\deg(y) = \deg(P) + 1$ si λ est racine 1

$\deg(y) = \deg(P) + 2$ si λ est racine 2.

II) Systèmes différentiels linéaires.

S: $\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) = b_1 \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) = b_n \end{cases}$

S $\Leftrightarrow E = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

• Si A diagonalisable et admet V_i v.p associée à λ_i ; alors

$\rightarrow y(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + Z e^{\lambda_m t} v_m$

• Point Méthode:

A diagonalisable $\Rightarrow \exists P$ inv; $PDP^{-1} = A$

(E): $X'(t) = AX(t) = PDP^{-1}X(t)$; on pose $X(t) = PY(t)$.

$\rightarrow$ (E): $Y'(t) = DY(t)$

⑤ Réduction

I Sous-espace stable:

1 Endomorphisme:

- * F stable par $f \iff f(F) \subseteq F$
 $\iff \forall x \in F; f(x) \in F.$
- * $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ stable $\iff \forall e_k, f(e_k) \in F.$
- * $F = \text{vect}(u)$ stable $\iff f(u) = \lambda \cdot u$

2 Matrice:

- * F stable par blocs $\iff M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ triangulaire par blocs
- * F et G stables par blocs $\iff M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ diagonale par blocs.
- * F stable $\implies f|_F$ induit un endomorphisme.

3 Sous-espaces particuliers: (Image et Noyau):

- $f \circ g = g \circ f \implies \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ stables par $g.$
 $\implies \text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ stables par $f.$

II Elements propres:

1 Valeur propre: α

- α valeur propre $\iff \alpha \neq 0; f(x) = \alpha x$
- α valeur propre $\iff \alpha \neq 0_m; Mx = \alpha X$

2 Valeur propre: λ

- $\lambda \in \text{Sp}(f) \iff \exists x \neq 0; f(x) = \lambda x$
 $\iff \chi_M(\lambda) = 0$
 $\iff E_\lambda(f) \neq \{0\}$

- ① Si $\dim(E) = n$
 - $\iff f - \lambda \text{id}$ non bijective
 - $\iff M - \lambda I_n$ non inversible.
 - $\iff \det(M - \lambda I_n) = 0$
 - $\iff \text{rang}(M - \lambda I_n) < n$

- * $\lambda \in \text{Sp}(f) \implies \lambda^k \in \text{Sp}(f)$

3 Sous-espace propre: $E_\lambda(f)$

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$$

- * $E_\lambda(f) \neq \{0\} \iff \lambda \in \text{Sp}(f)$
 $\implies \dim E_\lambda(f) \geq 1.$

III Polynôme caractéristique:

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$$

$$\chi_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

- * $\chi_A(x)$ scalaire $\implies \text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$
 $\implies \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$
 $\implies M$ triangulable.

$$* M \text{ triangulaire} \implies \text{Sp}(M) = \text{ensemble des } \lambda \text{ diagonales}$$

Propriétés:

$$\textcircled{1} \chi_A(x) = \chi_{f_A}(x)$$

$$\textcircled{2} \chi_A(x) = \chi_B(y) \text{ si } A \text{ et } B \text{ semblables.}$$

IV Diagonalisation:

- * M diagonalisable $\iff M$ semblable à $\text{diag}(\lambda_i)$
 $\iff \exists B$ base formée par les v_p de M
 $\iff \dim E_{\lambda_i}(M) = \alpha_{\lambda_i}$ de λ_i
 $\iff E_{\lambda_1}(M) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}(M) = E$

$$* M \text{ diagonale} \implies M \text{ diagonalisable.}$$

$$* \left. \begin{array}{l} M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M \text{ admet } m \text{ vp } \neq \end{array} \right\} \implies M \text{ diagonalisable.}$$

$$* M \text{ diagonalisable} \implies M^k \text{ et } {}^t M \text{ diagonalisables.}$$

$$* \left. \begin{array}{l} M \text{ diagonalisable} \\ \text{Sp}(M) = \lambda \end{array} \right\} \implies M = \lambda I_n.$$

$$* \text{rang}(E_{\lambda}) < \alpha_{\lambda}(\lambda) \implies M \text{ non diagonalisable.}$$

V Remarques et méthodes:

$$\textcircled{1} \text{ Pour } n=2 \text{ de } M^2 + M^2 - M = 0.$$

$$\text{On pose } \lambda \in \text{Sp}(M) \implies Mx = \lambda x$$

$$\textcircled{2} AB = BA \implies \chi_A = \chi_B \implies \text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$$

Espaces euclidiens:

1) Espace euclidien et projection orthogonale:

① Produit scalaire:

- * symétrique: $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
 - * bilinéaire: $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in E, \langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
 - * positive: $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$.
 - * définie: $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\Rightarrow$ on note le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

* Remarques:

- ① $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symétrique + bilinéaire / 1 variable $\Rightarrow$ bilinéaire.
- ② $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire + symétrique donc:
 $\forall x \in E, \langle x, x \rangle > 0 \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ défini + positif
- ③ $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} \Rightarrow \langle A, B \rangle = AB = \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{1k}$

* Propriétés:

- ① $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$
- ② $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \langle y, y \rangle$

② Norme euclidienne:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

* Propriétés:

- ① $\|\cdot\|$ vérifie: $\begin{cases} \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases}$
- ② ICS: $\langle x+y, x+y \rangle \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
- ③ $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

③ Orthogonalité:

- * $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
- * $x^\perp = \{y \in E, \langle x, y \rangle = 0\}$
- * $\langle x, y \rangle = 0 \forall y \in E \Rightarrow x = 0_E$
- * $\Phi = [e_1, \dots, e_n]$ famille orthogonale
 $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0; \forall i \neq j$
- * $\Phi = [e_1, \dots, e_n]$ famille orthonormée
 $\Leftrightarrow \Phi$ orthogonale + e_k normés unitaires
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0 \forall i \neq j \\ \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- * Φ orthonormée et $\text{card}(\Phi) = \dim(E) \Rightarrow B$ base orthonormée

* Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E :

- * $(a_i)_i = \langle f(e_j), e_i \rangle$
- * $\text{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k), e_k \rangle$
- * $mx = \sum_{k=1}^n x_k e_k \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$
- * $\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_i, e_k \rangle$

* Théorème de Pythagore:

$$\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2 \Leftrightarrow \Phi = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ orthogonale}$$

* Procédé d'orthonormalisation:

- ① On choisit base quelconque de $\Phi = (e_1, e_2, e_3)$
 - ② On pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
 - ③ On pose $v_2 = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$
 - ④ On choisit $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$
 - ⑤ On pose $v_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2$
 - ⑥ On choisit $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$
- $\Rightarrow \text{BON} = (u_1, u_2, u_3)$

④ Sous-espaces orthogonaux:

- * $\forall (x, y) \in (F, G); \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow F \perp G$
- * $F^\perp = \{x \in E, \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in F\}$
- * $F \perp G \Rightarrow G \subset F^\perp$ et $F \subset G^\perp$
 $\Rightarrow F \cap G = \{0\}$
- * F et G complémentaires orthogonaux $\Leftrightarrow F \oplus G$ et $F \perp G$
 $\Rightarrow G = F^\perp$ et $F = G^\perp$
- * notation: $F \oplus^\perp G = E$
- * $\left. \begin{matrix} E = F \oplus G \\ B_F \text{ BON de } F \\ B_G \text{ BON de } G \end{matrix} \right\} B = B_F \cup B_G \text{ BON adaptée à } E$
- * E espace préhilbertien $\Rightarrow E = F \oplus^\perp F^\perp$
 $\Rightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$
 $\Rightarrow (F^\perp)^\perp = F$
- * Soit $\Phi = (e_1, \dots, e_n)$ et $\Psi = (u_1, \dots, u_p)$
- * $\Phi^\perp = \{x, e_k\}$
- * $\Phi \perp \Psi \Leftrightarrow \langle e_k, u_j \rangle = 0$

5) Projection orthogonale:

$$E = F \oplus F^\perp \quad / \quad F = \text{Im}(p) \text{ et } F^\perp = \text{Ker}(p)$$

La projection de F sur $F^\perp$ est dite projection orthogonale.

Propriétés:

$$\textcircled{1} \text{Im}(p_F) \perp \text{Ker}(p_F) \quad (\text{car } F \perp F^\perp)$$

$$\textcircled{2} B_F = (e_1, e_2, \dots, e_m) \text{ BON de } F$$

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^m \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$\textcircled{3} \|x_F + x_{F^\perp}\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

$$\rightarrow \|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\textcircled{4} \langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), y + p_F(y) - p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle + \langle p_F(x), y - p_F(y) \rangle$$

$$\textcircled{5} p_F(x) = x_F = x - x_{F^\perp} = x - p_{F^\perp}(x)$$

$$p \text{ projection } \perp \Leftrightarrow p^2 = p \text{ et } \text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p) \\ \Rightarrow \text{Im}(p)^\perp = \text{Ker}(p)$$

$$p \text{ symétrique } \perp \Leftrightarrow p^2 = \text{id}_E \text{ et } E_1(p) \perp E_{-1}(p) \\ \Rightarrow E_1(p)^\perp = E_{-1}(p)$$

6) Distance:

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| = \|x_{F^\perp}\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$$

$$\forall x \in F, d(x, F) = 0.$$

II) Endomorphismes orthogonaux:

$$f \text{ linéaire vectorielle} \Leftrightarrow f \text{ automorphisme orthogonal} \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E)$$

$$f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ \Leftrightarrow \|f(x)\| = \|x\| \\ \Rightarrow f \text{ bijective.}$$

$$\left. \begin{array}{l} B \text{ BON de } E \\ f \in \mathcal{O}(E) \end{array} \right\} f(B) \text{ BON de } E$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \in \text{Sp}(f) \\ f \in \mathcal{O}(E) \end{array} \right\} \lambda = \pm 1 \rightarrow \det(f) = \pm 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ stable par } f \\ f \in \mathcal{O}(E) \end{array} \right\} F^\perp \text{ stable par } f$$

$$0^\perp \in \mathcal{O}(E) \text{ et } p^\perp \notin \mathcal{O}(E)$$

$$M \in \mathcal{O}(n) \Leftrightarrow {}^t M M = I_n \Leftrightarrow {}^t M = M^{-1} \\ \Leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ forme une BON} \\ \Rightarrow M \text{ inversible} \\ \Rightarrow \det(M) = \pm 1$$

$$E \text{ espace euclidien} \Leftrightarrow \exists B \text{ BON de } E$$

$$B \text{ BON de } E \Leftrightarrow \det(P_B) = 1.$$

$$B \text{ BON de } E \Leftrightarrow \det(P_B) = (-1)^n$$

$$\mathcal{SO}(E) = \{ f \in \mathcal{O}(E) : \det(f) = 1 \}.$$

$\mathcal{SO}(E)$ et $\mathcal{O}(E)$ sont stables par composition et l'identité

III) Endomorphismes symétriques:

$$f \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \langle f(x), y \rangle = \langle f(y), x \rangle$$

$$\Leftrightarrow {}^t M = M$$

$$\Leftrightarrow {}^t x M y = x M y$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) \perp \text{Ker}(f)$$

$$f \circ g \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f \text{ et } f, g \in \mathcal{S}(E)$$

$$p \text{ projection symétrique} \Leftrightarrow p \text{ projection } \perp \\ p \text{ symétrique symétrique} \Leftrightarrow p \text{ symétrique } \perp$$

Théorème spectral:

$$f \in \mathcal{S}(E) \Rightarrow \exists \lambda_i \text{ valeurs propres}$$

$$\Rightarrow f \text{ diagonalisable dans une BON}$$

$$\Rightarrow \exists P \in \mathcal{O}(n), {}^t P M P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \exists B, \text{ BON } f \text{ agit par } \lambda_i \text{ sur } p_i \text{ de } f.$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}(f) = E$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1}(f)^\perp = \dots = E_{\lambda_n}(f).$$

IV) Plan euclidien: rotation et réflexion:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

rotation d'angle θ

non diagonalisable

$$\det(R_\theta) = 1$$

$$R_\theta \in \mathcal{SO}_2 = \mathcal{O}_2^+$$

réflexion d'axe $E_{-1}(S_\theta)$

diagonalisable, $f \in \mathcal{S}(E)$

$$E_{-1} \perp E_1$$

$$\det S_\theta = -1$$

$$S_\theta \in \mathcal{O}_2^-$$

symétrique $\perp$ } réflexion
sur l'axe E_{-1}

Calcul Différentiel

I) Opérations:

① Dérivées partielles: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{cases}$

② Gradient: $\nabla(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

③ Différentiable: $D_u(f) = \langle \nabla(f(a)), h \rangle$

II) Dérivées d'ordre 1:

* f continue en (a,b) $\Leftrightarrow f(x,y) - f(a,b) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0$

Ide: $|f(x,y) - f(a,b)| \leq g(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0$

* f de classe $\mathcal{C}^1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ existe} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ continue.} \end{cases}$

Test: $\begin{cases} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \in \mathbb{R} \\ \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \in \mathbb{R} \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \right| \leq g(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0 \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right| \leq g(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0 \end{cases}$

* Composition de 2 fonctions dans $\mathcal{C}^1$ - règle de la chaîne:

* $g(u,v) = f(x,y) = f(\gamma_1, \gamma_2)$ avec $\gamma_1: (u,v) \rightarrow (x,y)$

$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$

* DL1: $f((x,y) + (h_1, h_2)) = f(x,y) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} + o(\|(h_1, h_2)\|)$

* Plan tangent: $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

III) Dérivées d'ordre 2:

* f de classe $\mathcal{C}^2$ $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existe et est la même.

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

* Maximum local: $\forall h \in B(A, r) \cap D; f(A+h) \leq f(A)$

* Minimum local: $\forall h \in B(A, r) \cap D; f(A+h) \geq f(A)$

* Maximum global: $\forall A \in D; \exists r > 0; f(A+h) \leq f(A)$

* Minimum global: $\forall A \in D; \exists r > 0; f(A+h) \geq f(A)$

* f admet extremum local $\Leftrightarrow \nabla(f(A)) = 0$.

$\Leftrightarrow$ A point critique.

* DL2:

$f(A+h) = f(A) + \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \right) + o(\|h\|^2)$

* Naher le point critique A:

$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$

$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$

$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$

* $\Delta \Delta - \Delta^2 > 0$:

$-\Delta < 0 \Rightarrow$ max local.

$-\Delta > 0 \Rightarrow$ min local.

* $\Delta \Delta - \Delta^2 < 0 \Rightarrow$ p selle.