

① Séries numériques.

① Convergence et Divergence de série:

① Convergence:

- ① $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n + v_n$ converge.
- ② $\sum u_{n+1} - u_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ③ $u_n > 0$ et $\sum u_n$ majorée $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ④ $u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ⑤ $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ⑥ $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ⑦ $\sum |u_n|$ converge (CVA) $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ⑧ $\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \in]0, 1[\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- ⑨ $u_n > 0; u_n \downarrow; u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^n u_n$ converge.
- ⑩ $f > 0; f \downarrow; f$ st CPM $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \sum f(n)$ cv
 et on a: $\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$

② Séries usuelles:

- * $\sum \frac{1}{n^d}$: Riemann - converge si $d > 1$.
- * $\sum q^n$: Géométrique - converge si $|q| < 1$.
- * $\sum \frac{q^n}{n!}$: Exponentielle - converge $\forall q \in \mathbb{C}$.
- * $\sum (u_n)$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

③ Divergence:

- ① $\sum u_n$ converge; $\sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n + v_n$ diverge.
- ② $u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.
- ③ $u_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum u_n$ diverge opérateur.
- ④ $\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

II Calcul des sommes d'une série:

- ① $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^0}{1-q}$.
- ② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{n!} = e^q$.
- ③ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}) - u_0$.
- ④ Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CVA $\Rightarrow c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
 et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

② Intégration sur Intervalle quelconque.

① Convergence de l'intégrale:

② Intervalle type $[a, +\infty[$:

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe et finie $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- ② $f \geq 0$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ majorée $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- ③ $f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- ④ $f = o(g)$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- ⑤ $f \sim g$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

③ Intervalle type $] -\infty, a]$:

- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt$ existe et finie $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(t) dt$ converge.

④ Intervalle type $[a, b[$ ou $]b, a]$:

- ① * $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$ existe et finie $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge
 * $\lim_{x \rightarrow b} \int_x^a f(t) dt$ existe et finie $\Rightarrow \int_b^a f(t) dt$ converge
- ② f continue sur $[a, b[$ et polynomiale au $V(b)$ $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge
 f continue sur $]b, a]$ et polynomiale au $V(b)$ $\Rightarrow \int_b^a f(t) dt$ converge

④ Intervalle type $]a, b[$:

- * $\int_a^x f(t) dt$ et $\int_x^b f(t) dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge

⑤ Sur tous les intervalles, (I)

- ① $\int_I f(t) dt$ converge (intégrable) $\Rightarrow \int_I f(t) dt$ converge

② Fonctions usuelles:

- * $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^d} dt$ converge si $(d > 1)$
- * $\int_0^x \frac{1}{t^d} dt$ converge si $(d < 2)$
- * $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge si $(a > 0)$
- * $\int_0^x \ln(t) dt$ converge

③ Chercher une primitive.

II Propriétés des intégrales:

- ① f continue; $f \geq 0$; $\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ sur $[a, b]$
- ② f continue; $f \geq g$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

$$\textcircled{4} u = f(t) \mapsto \varphi(u) = t = \dots; \varphi \text{ dans } \mathcal{C}^1,$$

bijection de I sur J .

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du.$$

$$\textcircled{5} \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

généralisé: $uv \xrightarrow[k \rightarrow b]{k \rightarrow a} 0$

$$\textcircled{6} f(x) = \int_a^x g(t) dt \text{ avec } g \text{ continue sur } I, a \in I$$

$$\Rightarrow f \text{ dans } \mathcal{C}^1 \text{ et } f'(x) = g(x).$$

$$\textcircled{7} f \text{ n'est pas définie en } a \text{ mais}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ prolongable par continuité}$$

$$\Rightarrow f \text{ intégrable au v.l.}$$

Suites et Séries de fonctions - Intégrales Paramétriques

I Suites de fonctions:

1) Théorème de Continuité: (TC)

- f_n continue sur I
 - $f_n \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} f$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ continue sur } I \\ f_n \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} f \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ continue sur } I$$

2) Théorème Interprétation des limites: (TIL)

- $f_n \xrightarrow[I]{CVU} f$
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_m$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[I]{CVU} f \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_m \end{array} \right\} \Rightarrow (f_n) \text{ converge sur } I; \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe et:}$$
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_m) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

3) Théorème de dérivation terme à terme: (TDTT)

- f_n classe $\mathcal{C}^1$ sur I
 - $f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$
 - $f'_n \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f_n \xrightarrow[I]{CVS} f \\ f'_n \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I; f' \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g \text{ et:}$$
- $$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

4) Théorème de dérivation successive: (TDS)

- f_n classe $\mathcal{C}^p$ sur I
 - $\forall k \in [0, p-1]; f_n^{(k)} \xrightarrow[I]{CVS} f^{(k)}$
 - Pour l'ordre $p; f_n^{(p)} \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall k \in [0, p-1]; f_n^{(k)} \xrightarrow[I]{CVS} f^{(k)} \\ \text{Pour l'ordre } p; f_n^{(p)} \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \text{ et:}$$
- $$f^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x)$$

5) Théorème d'intégration sur segment: (TITT)

- f_n continue sur $[a,b]$
 - $f_n \xrightarrow[\forall [a,b]]{CVU} f$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ continue sur } [a,b] \\ f_n \xrightarrow[\forall [a,b]]{CVU} f \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

6) Théorème de convergence dominée: (TCD)

- f_n et f CPM sur I
 - $f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$
 - $\exists \varphi$ intégrable, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ et } f \text{ CPM sur } I \\ f_n \xrightarrow[I]{CVS} f \\ \exists \varphi \text{ intégrable, } |f_n(t)| \leq \varphi(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

7) CVS sur I :

- $f_n \xrightarrow[I]{CVS} f \iff f_n(x) \text{ converge vers } f(x)$
- $x \in [a, n] \implies n \in [x, +\infty[$ (l'intervalle ne doit pas changer)

8) CVU sur I :

- $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies f_n \xrightarrow[I]{CVU} f$
- $g(x) = |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \implies g(x) = \dots$
- f continue sur $[a,b] \implies f$ bornée $\implies \exists M \forall x: |f(x)| \leq M$
- $\implies$ Si $f_n \xrightarrow[I]{CVU} f$ continue $\implies |f_n(x) - f(x)| \leq M$

II Séries de fonctions:

1) Théorème de continuité: (TC)

- $\forall n \in \mathbb{N}; f_n$ continue sur I
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ CVU $\forall [a,b] \subset I$
- $$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}; f_n \text{ continue sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ CVU } \forall [a,b] \subset I \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ continue sur } I$$

2) Théorème interprétation des limites: (TIL)

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ CVU sur I
 - $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_m$
- $$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ CVU sur } I \\ \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_m \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge; } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ existe}$$
- $$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

3) Théorème de dérivation terme à terme: (TDTT)

- f_n classe $\mathcal{C}^1$ sur I
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ CVS sur I
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ CVS sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et:}$$
- $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)'$$

4) Théorème de dérivation successive: (TDS)

- f_n classe $\mathcal{C}^p$ sur I
 - $\forall k \in [0, p-1]; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)} \right) \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVS} f^{(k)}$
 - Pour l'ordre $p; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \right) \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall k \in [0, p-1]; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)} \right) \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVS} f^{(k)} \\ \text{Pour l'ordre } p; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \right) \xrightarrow[\forall [a,b] \subset I]{CVU} g \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ et:}$$
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)^{(k)}$$

5) Théorème d'intégration sur un segment: (TITT)

- f_n continue sur $[a,b]$
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[\forall [a,b]]{CVU} f$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ continue sur } [a,b] \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[\forall [a,b]]{CVU} f \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

6) Théorème de convergence dominée: (TCD)

- f_n et f CPM sur I
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$
 - $\exists \varphi$ intégrable; $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \varphi(x)$
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ et } f \text{ CPM sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[I]{CVS} f \\ \exists \varphi \text{ intégrable; } \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \varphi(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

7) Théorème d'intégration sur un intervalle: (TITT)

- f_n intégrable sur I
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$
 - $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt$ converge
- $$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ intégrable sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[I]{CVS} f \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[\text{elle CVS}]{CVU} f \text{ et } |f_n(x)| \leq \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow[\text{et } \sum \alpha_n \text{ converge}]{CVU} f \iff \sup |f_n(x)| \leq \alpha_n \iff |f_n(x)| \leq \alpha_n$$

III) Intégrals paramétrés :

1) Théorie de continuité : (TC)

- $\forall t \in I; x \leftarrow f(x, t)$ continue sur J .
- $\forall x \in J; t \leftarrow f(x, t)$ CPM sur I
- $\forall (x, t) \in (J \times I); |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ intégrable

$$\Rightarrow F(x) = \int_I f(x, t) dt \text{ définie et continue sur } J$$

2) Théorie de dérivation sous signe intégral théorème : (TDS)

- $\forall t \in I; x \leftarrow f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .
- $\forall x \in I; t \leftarrow f(x, t)$ intégrable sur I .
- $\forall (x, t) \in (J \times I); \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \varphi(t)$ intégrable

$$\Rightarrow F \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \text{ et } F'(x) = \int_I \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

3) Théorie de dérivation sous signe intégral méliorée : (TDS)

- $\forall t \in I; x \leftarrow f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur J .
- $\forall x \in J; \forall k \in [0, p-1]; \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k}$ intégrable sur I .
- $\forall (x, t) \in (J \times I); \left| \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial x^p} \right| \leq \varphi(t)$ intégrable

$$\Rightarrow F \text{ de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } J \text{ et } F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k} dt$$

Remarques :

1) Pour les suites et les séries de fonctions :

- Montrer que $f_n \left(\text{ou } \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) \mathcal{C}^p$ revient à moy :

$$* f_n \text{ de classe } \mathcal{C}^p,$$

$$* f_n \left(\text{ou } \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) \text{ Cvs}$$

$$* \forall k \geq 1; f_n^{(k)} \left(\text{ou } \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)^{(k)} \right) \text{ Cvx}$$

2) Pour les intégrals paramétrés :

- L'hypothèse de majoration peut être $\forall [a, b] \subset I$:

$$\text{Exemple : } T(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$$\forall [a, b] \subset]0, +\infty[; \forall x \in [a, b]; \forall t \in]0, +\infty[:$$

$$|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}.$$

I) Série entière

I) Généralités :

1) Lemme d'Abel :

$$\left. \begin{array}{l} |x| \leq |y| \\ a_n \cdot y^n \text{ bornée} \end{array} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ CVA.}$$

2) Rayon de convergence :

$$R = \sup \{ r > 0; a_n r^n \text{ bornée} \}.$$

$$* |x| < R \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ CVA} \leftrightarrow (a_n x^n) \text{ bornée}$$

$$* |x| > R \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ diverge presque sûrement}$$

$$* |a_n| \leq |b_n| \rightarrow R_a \geq R_b.$$

$$* a_n = o(b_n) \rightarrow R_a \geq R_b.$$

$$* a_n \sim b_n \rightarrow R_a = R_b.$$

3) Critère d'Abel :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = l |x| \leftrightarrow R = \frac{1}{l}.$$

4) Somme et produit de séries entières :

$$* R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$$

$$* \text{Si } \sum a_n x^n \text{ et } \sum b_n x^n \text{ CVA} \Rightarrow R_{ab} \geq \min(R_a, R_b)$$

II) Théorèmes pour une série entière :

1) Convergence normale :

$$\forall n < R; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ CVN sur } [-n, n].$$

2) Théorème de continuité : (TC)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ continue sur }]-R, R[$$

3) Théorème de rayon de convergence : (TR)

$$R_{cv} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = R_{cv} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot a_n x^n \right) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

4) Théorème de dérivation : (TD)

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

5) Théorème de dérivation : (TD)

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

III) Développement en série entière au voisinage de 0 :

$$f \text{ DSE}_0 \iff f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

1) Le DSE₀ est unique.

$$* \text{Exemple : } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + b_0 = 0.$$

$$\text{Par unicité du DSE}_0 : \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n - b_n = 0. \end{cases}$$

2) f et g DSE₀ alors :

$$f+g; fg; \lambda f \text{ sont DSE}_0.$$

$$* f \text{ DSE}_0 \Rightarrow f \text{ est } C^\infty \Rightarrow (a_n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

$$* \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ unique solution vérifiant le problème de Cauchy.}$$

IV) Développement usuels :

$$* e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$* \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

$$* \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$* (1+x)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} x^n.$$

$$* \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

$$* \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \frac{x^{2n}}{2n!}.$$

$$* \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$* \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$* \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

* Exemple de DSE₀ :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} a_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \rightarrow a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$* a_1 = \frac{1}{1!} a_0 = 0.$$

$$* a_2 = \frac{1}{2!} a_1 = 0.$$

$$* a_3 = \frac{1}{3!} a_2 = 0.$$

$$* a_4 = \frac{1}{4!} a_3 = 0.$$

$$* a_5 = \frac{1}{5!} a_4 = 0.$$

$$* a_6 = \frac{1}{6!} a_5 = 0.$$

$$* a_7 = \frac{1}{7!} a_6 = 0.$$

$$* a_8 = \frac{1}{8!} a_7 = 0.$$

$$* a_9 = \frac{1}{9!} a_8 = 0.$$

$$* a_{10} = \frac{1}{10!} a_9 = 0.$$

$$* a_{11} = \frac{1}{11!} a_{10} = 0.$$

$$* a_{12} = \frac{1}{12!} a_{11} = 0.$$

$$* a_{13} = \frac{1}{13!} a_{12} = 0.$$

$$* a_{14} = \frac{1}{14!} a_{13} = 0.$$

$$* a_{15} = \frac{1}{15!} a_{14} = 0.$$

$$* a_{16} = \frac{1}{16!} a_{15} = 0.$$

$$* a_{17} = \frac{1}{17!} a_{16} = 0.$$

$$* a_{18} = \frac{1}{18!} a_{17} = 0.$$

$$* a_{19} = \frac{1}{19!} a_{18} = 0.$$

$$* a_{20} = \frac{1}{20!} a_{19} = 0.$$

$$* a_{21} = \frac{1}{21!} a_{20} = 0.$$

$$* a_{22} = \frac{1}{22!} a_{21} = 0.$$

$$* a_{23} = \frac{1}{23!} a_{22} = 0.$$

$$* a_{24} = \frac{1}{24!} a_{23} = 0.$$

$$* a_{25} = \frac{1}{25!} a_{24} = 0.$$

$$* a_{26} = \frac{1}{26!} a_{25} = 0.$$

$$* a_{27} = \frac{1}{27!} a_{26} = 0.$$

$$* a_{28} = \frac{1}{28!} a_{27} = 0.$$

$$* a_{29} = \frac{1}{29!} a_{28} = 0.$$

$$* a_{30} = \frac{1}{30!} a_{29} = 0.$$

$$* a_{31} = \frac{1}{31!} a_{30} = 0.$$

$$* a_{32} = \frac{1}{32!} a_{31} = 0.$$

$$* a_{33} = \frac{1}{33!} a_{32} = 0.$$

$$* a_{34} = \frac{1}{34!} a_{33} = 0.$$

$$* a_{35} = \frac{1}{35!} a_{34} = 0.$$

$$* a_{36} = \frac{1}{36!} a_{35} = 0.$$

$$* a_{37} = \frac{1}{37!} a_{36} = 0.$$

$$* a_{38} = \frac{1}{38!} a_{37} = 0.$$

$$* a_{39} = \frac{1}{39!} a_{38} = 0.$$

$$* a_{40} = \frac{1}{40!} a_{39} = 0.$$

$$* a_{41} = \frac{1}{41!} a_{40} = 0.$$

$$* a_{42} = \frac{1}{42!} a_{41} = 0.$$

$$* a_{43} = \frac{1}{43!} a_{42} = 0.$$

$$* a_{44} = \frac{1}{44!} a_{43} = 0.$$

$$* a_{45} = \frac{1}{45!} a_{44} = 0.$$

$$* a_{46} = \frac{1}{46!} a_{45} = 0.$$

$$* a_{47} = \frac{1}{47!} a_{46} = 0.$$

$$* a_{48} = \frac{1}{48!} a_{47} = 0.$$

$$* a_{49} = \frac{1}{49!} a_{48} = 0.$$

$$* a_{50} = \frac{1}{50!} a_{49} = 0.$$

$$* a_{51} = \frac{1}{51!} a_{50} = 0.$$

$$* a_{52} = \frac{1}{52!} a_{51} = 0.$$

$$* a_{53} = \frac{1}{53!} a_{52} = 0.$$

$$* a_{54} = \frac{1}{54!} a_{53} = 0.$$

$$* a_{55} = \frac{1}{55!} a_{54} = 0.$$

$$* a_{56} = \frac{1}{56!} a_{55} = 0.$$

$$* a_{57} = \frac{1}{57!} a_{56} = 0.$$

$$* a_{58} = \frac{1}{58!} a_{57} = 0.$$

$$* a_{59} = \frac{1}{59!} a_{58} = 0.$$

$$* a_{60} = \frac{1}{60!} a_{59} = 0.$$

$$* a_{61} = \frac{1}{61!} a_{60} = 0.$$

$$* a_{62} = \frac{1}{62!} a_{61} = 0.$$

$$* a_{63} = \frac{1}{63!} a_{62} = 0.$$

$$* a_{64} = \frac{1}{64!} a_{63} = 0.$$

$$* a_{65} = \frac{1}{65!} a_{64} = 0.$$

$$* a_{66} = \frac{1}{66!} a_{65} = 0.$$

$$* a_{67} = \frac{1}{67!} a_{66} = 0.$$

$$* a_{68} = \frac{1}{68!} a_{67} = 0.$$

$$* a_{69} = \frac{1}{69!} a_{68} = 0.$$

$$* a_{70} = \frac{1}{70!} a_{69} = 0.$$

$$* a_{71} = \frac{1}{71!} a_{70} = 0.$$

$$* a_{72} = \frac{1}{72!} a_{71} = 0.$$

$$* a_{73} = \frac{1}{73!} a_{72} = 0.$$

$$* a_{74} = \frac{1}{74!} a_{73} = 0.$$

$$* a_{75} = \frac{1}{75!} a_{74} = 0.$$

$$* a_{76} = \frac{1}{76!} a_{75} = 0.$$

$$* a_{77} = \frac{1}{77!} a_{76} = 0.$$

$$* a_{78} = \frac{1}{78!} a_{77} = 0.$$

$$* a_{79} = \frac{1}{79!} a_{78} = 0.$$

$$* a_{80} = \frac{1}{80!} a_{79} = 0.$$

$$* a_{81} = \frac{1}{81!} a_{80} = 0.$$

$$* a_{82} = \frac{1}{82!} a_{81} = 0.$$

$$* a_{83} = \frac{1}{83!} a_{82} = 0.$$

$$* a_{84} = \frac{1}{84!} a_{83} = 0.$$

$$* a_{85} = \frac{1}{85!} a_{84} = 0.$$

$$* a_{86} = \frac{1}{86!} a_{85} = 0.$$

$$* a_{87} = \frac{1}{87!} a_{86} = 0.$$

$$* a_{88} = \frac{1}{88!} a_{87} = 0.$$

$$* a_{89} = \frac{1}{89!} a_{88} = 0.$$

$$* a_{90} = \frac{1}{90!} a_{89} = 0.$$

$$* a_{91} = \frac{1}{91!} a_{90} = 0.$$

$$* a_{92} = \frac{1}{92!} a_{91} = 0.$$

$$* a_{93} = \frac{1}{93!} a_{92} = 0.$$

$$* a_{94} = \frac{1}{94!} a_{93} = 0.$$

$$* a_{95} = \frac{1}{95!} a_{94} = 0.$$

$$* a_{96} = \frac{1}{96!} a_{95} = 0.$$

$$* a_{97} = \frac{1}{97!} a_{96} = 0.$$

$$* a_{98} = \frac{1}{98!} a_{97} = 0.$$

$$* a_{99} = \frac{1}{99!} a_{98} = 0.$$

$$* a_{100} = \frac{1}{100!} a_{99} = 0.$$

⑤ Couples vectoriels normés.

I Définitions:

① $\|\cdot\|$ norme de E:

$$\bullet \|x\| = 0 \rightarrow x = 0_e$$

$$\bullet \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\bullet \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\bullet \|\alpha x - \beta y\| \leq \|\alpha\| \|x\| + \|\beta\| \|y\|$$

$$\bullet \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ PS} \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ norme euclidienne.}$$

② $B(u, r) = \{x; \|x-u\| < r\}$

$B_p(u, r) = \{x; \|x-u\|_p \leq r\}$

$S(u, r) = \{x; \|x-u\| = r\}$

③ A borné: $\Leftrightarrow A \in B(0, M) \Leftrightarrow \exists M > 0; \forall x \in A, \|x\| \leq M$

A convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in A; \forall t \in [0, 1]; tx + (1-t)y \in A$

A ouvert $\Leftrightarrow A^\circ = A$

A fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow \partial A \subset A$

④ u intérieur à $A \Leftrightarrow u \in A^\circ \Leftrightarrow \exists r > 0; B(u, r) \subset A$

u adhérent à $A \Leftrightarrow u \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0; B(u, r) \cap A \neq \emptyset$

u frontière de $A \Leftrightarrow u \in \bar{A} \setminus A^\circ \Leftrightarrow u \in \partial A$

II Suites dans un v.m.

① (x_n) bornée $\Leftrightarrow (x_n) \in B(0, M) \Leftrightarrow \exists M > 0; \forall n \in \mathbb{N}; \|x_n\| \leq M$

(x_n) cv vers $a \Leftrightarrow \|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(x_n) cv $\Rightarrow (x_n)$ bornée.

② A fermé $\Leftrightarrow \forall (x_n)$ cv $\subseteq A; \lim(x_n) \in A$.

$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq A; \lim(x_n) = a$.

III Applications dans un v.m.

① $\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\| \Rightarrow f$ lipschitzienne.

$\bullet f$ polynôme à k-ys variables.

$\bullet f$ rationnelle et le dénominateur $\neq 0$.

$\bullet f$ linéaire en dimension finie.

$\bullet f$ multilinéaire en dimension finie.

f continue.

② f continue. $\left. \begin{array}{l} A \text{ borné fermé} \\ A \text{ borné} \end{array} \right\} f \text{ bornée et atteint ses bornes.}$

③ f continue et $A = \{x \in E / f(x) = a\}$

$\bullet \{f(x) < a\} \cup \{f(x) > a\} \rightarrow A$ ouvert

$\bullet \{f(x) \geq a\} \cap \{f(x) \leq a\} \rightarrow A$ fermé.

④ $\lim(u_n) = l; f$ continue en $l \Rightarrow \lim(f(u_n)) = f(\lim(u_n))$

IV Applications usuelles.

① $x \mapsto \|x\|$ lipschitzienne.

② $x \mapsto ux$ linéaire. $\rightarrow$ continue.

$x \mapsto x^2$ non continue.

$p \mapsto pg$ linéaire. $\rightarrow$ continue.

$(p, q) \mapsto pg$ bilinéaire. $\rightarrow$ continue.

$(p, q) \mapsto p^t q$ non continue.

$(p, q, r) \mapsto pgR$ trilineaire $\rightarrow$ continue.

③ AM linéaire, $\|A\|$ lipschitzienne. $\Rightarrow \|AM\|$ continue.

④ $\pi(M)$ linéaire $\rightarrow$ continue.

τ_M linéaire. $\rightarrow$ continue.

⑤ $\det(M)$: On pose $f: \mathcal{M}_{n,1} \times \dots \times \mathcal{M}_{n,1} \rightarrow \mathbb{R}$
 $M = (c_1, \dots, c_n) \rightarrow \det(c_1, \dots, c_n)$

f continue en multilinéarité aux colonnes de M .

⑥ (A, A) et AB continue. $\Rightarrow A^t$ continue.

⑦ $A \mapsto (A, A)$ linéaire continue

$(A, A) \mapsto \tau AA$ bilinéaire continue.

τAA continue.

V Remarques:

$\left. \begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ B \text{ fermé} \\ A \cap B \text{ fini} \end{array} \right\} A \cap B \text{ fermé.}$

$\left. \begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ B \text{ fermé} \\ A \cap B \text{ infini} \end{array} \right\} A \cap B \text{ ouvert.}$

⑥ Espaces probabilisés

I Généralités et notions de base:

- A événement négligeable $\Rightarrow p(A) = 0$.
- A événement prévisible $\Rightarrow p(A) = 1$.
- A implique B $\Leftrightarrow A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
- A et B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
- p est probabilité si:

$$\begin{cases} * p(\Omega) = 1 \\ * \forall (A_i) \in \mathcal{F}; p(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(A_i) \end{cases}$$

II Suites d'événements:

- (A_n) suite d'événements deux à deux incompatibles
 $\Rightarrow p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$
- (A_n) suite croissante d'événements ($A_n \Rightarrow A_{n+1}$)
 $\Rightarrow p(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$
- (A_n) suite décroissante d'événements ($A_{n+1} \Rightarrow A_n$)
 $\Rightarrow p(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$
- (A_n) système complet d'événements:
 $* A_m \cap A_n = \emptyset \quad \forall m \neq n$
 $* \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$

III Probabilités conditionnelles et indépendantes:

Loi conditionnelle: $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

* probabilités composées:

$$p(\bigcap_{k=1}^n A_k) = p(A_1) p(A_2/A_1) \dots p(A_n/A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$$

* probabilités totales: (Si (A_k) système complet d'ent)

$$p(B) = \sum_{k=1}^{\infty} p(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(B/A_k) p(A_k)$$

* Formule de Bayes:

$$p(B/A) = \frac{p(A/B) p(B)}{p(A)}$$

Loi indépendante: $A \perp B \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) p(B)$

* $p(A) = 0$ ou $1 \Leftrightarrow A \perp B; \forall B \in \mathcal{F}$.

* (A_n) famille indépendante $\Leftrightarrow p(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} p(A_i)$

⑦ Variables aléatoires:

I Généralités et couple de variables:

- ① X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow \begin{cases} X(\omega) = Y(\omega) \\ p(X=x) = p(Y=y) \end{cases}$
- ② X v.d et f application $\Rightarrow f \circ X$ v.d.
- ③ X et Y v.d $\Rightarrow (X, Y)$ v.d.
- ④ * $p(X=k, Y=m) = p(X=k|Y=m) p(Y=m)$
 $* p(X=k) = \sum_{m \in \mathcal{Y}(Y)} p(X=k, Y=m)$
 $* p(Y=m) = \sum_{k \in \mathcal{X}(X)} p(X=k, Y=m)$
- ⑤ $X \perp Y \Leftrightarrow p(X=k, Y=m) = p(X=k) \cdot p(Y=m)$
- ⑥ $X \perp Y \Rightarrow f(X) \perp g(Y)$

II Espérance:

- ① $E(X)$ existe $\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n p(X=n) < +\infty$
- ② $E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n p(X=n) \quad \forall x(\omega)$
 $= \sum_{n \in \mathbb{N}} p(X=n) \quad \text{si } X(\omega) \in \mathbb{N}$
 $= \sum p(X \geq n) \quad \text{si } X(\omega) \in \mathbb{N}$
- ③ $E(f(X)) = \sum f(n) p(X=n)$
- ④ * X admet moment d'ordre $k \Rightarrow E(X^k)$ existe.
 $* X$ admet moment d'ordre $k \Rightarrow X$ admet moment d'ordre $n < k$
- ⑤ Propriétés de $E(X)$:
 $* E(X)$ linéaire et $\mathbb{R}$
 $* X = a \Rightarrow E(X) = a$
 $* E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$
 $* X \perp Y \Rightarrow E(XY) = E(X) E(Y)$

III Variance:

- ① $V(X)$ existe $\Leftrightarrow E(X^2)$ existe.
- ② $V(X) = E(X - E(X))^2$
 $= E(X^2) - E(X)^2$
- ③ Propriétés de $V(X)$:
 $* V(aX+b) = a^2 V(X)$
 $* X \perp Y \Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

IV Covariance:

- ① $\text{cov}(X, Y)$ existe $\Leftrightarrow V(X)$ et $V(Y)$ existe.
- ② $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$
 $= E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

③ Propriétés de $\text{cov}(X, Y)$:

- * $\text{cov}(X, Y)$ bilinéaire, symétrique et positive.
- * $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y)$
- * $V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\text{cov}(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j)$
- * $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$
- * $X \perp Y \Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$.

IV) Fonction génératrice:

① $G_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} p(X=n)$.

② Propriétés de $G_X(t)$:

- * G_X continue sur $[-1, 1]$
- * G_X CVN. sur $[-1, 1]$ et $\text{cov} > 1$.
- * $G_X(1) = 1$.
- * $G_X = G_Y \Leftrightarrow X$ et Y ont la même loi.
- * G_X dérivable $\Rightarrow$ loi dérivée avec restriction.
- $\Rightarrow p(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$
- * $X \perp Y \Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$.

③ Relation avec espérance et variance:

- * $E(X)$ existe $\Leftrightarrow G_X$ dérivable en 1
- * $V(X)$ existe $\Leftrightarrow G_X$ deux fois dérivable en 1.
- * $E(X) = G_X'(1)$
- * $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1)^2 - G_X'(1)^2$

V) Inégalité classiques:

① Markov: $p(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}$.

② Bienaymé-Tchebichev: $p(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$.

③ Loi faible des grands nombres: Si $(X_i \perp X_j) \forall i \neq j$:

$p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

VII) Variables aléatoires usuelles:

① Uniforme: Equiprobabilité sur $[a, b]$

② Binomiale: $(X=0)$: échec; $(X=1)$: succès.

③ Binomiale: "nombre de succès" de succession de n épreuves Binomiales indépendantes et identiques.

④ Géométrique: "nombre de $k^{\text{ème}}$ succès" de succession de n épreuves

⑤ Poisson: "occurrence d'un évènement par unité de temps"

	Uniforme	Binomiale	Binomiale	Géométrique	Poisson
$X \hookrightarrow$	$X \hookrightarrow U(a, b)$	$X \hookrightarrow B(p)$	$X \hookrightarrow B(n, p)$	$X \hookrightarrow G(p)$	$X \hookrightarrow P(\lambda)$
$X(n)$	$[1, 2, \dots, n]$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$
$p(X=k)$	$1/n$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$q^{k-1} \cdot p$	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
$E(X)$	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$1/p$	λ
$V(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	pq	npq	q/p^2	λ
$G_X(t)$	$\frac{1}{n}(e^{tb} - e^{ta})$	$q + pt$	$(q + pt)^n$	$\frac{pe^{t-1}}{1-t}$	$e^{\lambda(t-1)}$

Remarque:

Suite arithmétique - géométrique $\Rightarrow$ géométrique.

① $U_{n+1} = a U_n + b$.

② $l = a l + b \rightarrow l = \frac{b}{1-a}$

③ On pose $V_n = U_n - l$. suite géométrique de raison (a)

④ $V_n = (a)^n V_0$ (ou $l^{n-1} V_1$)

⑤ $U_n = l + V_n = l + l^{n-1} V_1$