

* Eq diff linéaire d'ordre 1: $(E = \text{Kev de dim finie et } I \text{ intervalle de } \mathbb{R}.)$

$$(E): x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$$

avec: $a: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b: I \rightarrow E$ sont continues
 $t \mapsto a(t)$ $t \mapsto b(t)$

$x: I \rightarrow E$ = l'inconnue est dérivable.
 $t \mapsto x(t)$

Eq diff

⚠: toute sol^e de (E) est de classe $\mathcal{C}^1$.

→ Ecriture matricielle: $(B = e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$(E): X(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec: $A(t) = M_B(a(t)) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$

$$X(t) = M_B(x(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$B(t) = M_B(b(t)) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$(S): \begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$(S) \Leftrightarrow (E)$: système différentielle.

(1)

Th de Cauchy Lipschitz : $(E) = x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$
 $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont continues
 $t \mapsto A(t)$ $t \mapsto B(t)$

alors : $\forall (t_0, x_0)$ fixées : $\begin{cases} x' = Ax + B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique sol^e

Eq homogène :

$$(E_0) : x'(t) = a(t)x(t)$$

$x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$
 $t \mapsto x(t)$
 de classe $\mathcal{C}^1$

→ matriciellement : $(E_0) : x'(t) = A(t)x(t)$

on note : S_0 l'ensemble des sol^e de (E_0)

* S_0 est un sev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ de $\dim = n$.

Systeme fondamentale des sol^s : S.F.S

* on a : $\dim(S_0) = n$, soit $(x_1, \dots, x_n)$ base de S_0 .

toute sol^e de (E_0) est de la forme = sys. fond de sol^e de (E_0)

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t)$$

* $(x_1, \dots, x_n)$ S.F.S $\left\{ \begin{array}{l} \text{ssi} = \det(x_1, \dots, x_n) \neq 0. \\ \omega(t), \forall t \\ \text{ssi} = \exists t_0 \in I \text{ tq } \omega(t_0) \neq 0. \end{array} \right.$

* $\omega(t)$: appelé le wronskien de $(x_1, \dots, x_n)$

Sol^e particulière = soit $(x_1, \dots, x_n)$ S.F.S de (E_0)

$$x_p(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) + \dots + \lambda_n(t)x_n(t)$$

avec : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dérivables.

♥ Protocole de résolution :

① cherchons un S.F.S de $(E_0) : (x_1, \dots, x_n)$

② cherchons sol^e particulière $x_p(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) x_i(t)$

③ sol^e générale : $x(t) = x_p(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t)$

* Eq diff linéaire d'ordre 1 à coeff ctes : $x_p(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) x_i(t)$

$$(E) : x'(t) = a(x(t)) + b(t)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i'(t) x_i(t) = B(t)$$

avec : $a \in d(E)$, $b : I \rightarrow E$ continue
 $t \mapsto b(t)$

$x : I \rightarrow E$: inconnue dérivable.

→ Ecriture matricielle : B : base de E .

$$(S) = \begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

(S) : système différentielle à coeff ctes

$$(S) \Leftrightarrow x'(t) = A x(t) + B(t)$$

avec : $A = M_B(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$x(t) = M_B(x(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = M_B(b(t)) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

Sol^e homogène : $(E_0) : x'(t) = A \cdot x(t)$

$$(S_0) = \left\{ e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

ensemble des sol^e de (E_0) .

$$\Delta: S_0 = \left\{ e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_i \in \mathbb{K} \right\} = \text{vect}(v_1, \dots, v_n)$$

avec =

$(v_1, \dots, v_n)$ = les colonnes de e^{tA}
 S.F.S de (E_0)

* toute sol^e de (E_0) s'écrit : $x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(t), \alpha_i \in \mathbb{K}$

Th de Cauchy lipschitz : I intervalle de $\mathbb{R}$ tq : $0 \in I$

$\forall x_0 \in \mathbb{K}^n$, $\begin{cases} x'(t) = A x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique
 -fixé sol^e : $x(t) = e^{tA} x_0$

$$\Delta: t_0 \in I, (S) = \begin{cases} x'(t) = A x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(S) admet comme sol^e : $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$

Les particulier : si A est diagonalisable

$(v_1, \dots, v_n)$ base des $\vec{v}_p$ de A) d'ensemble =
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les v_p associés $\left(e^{\alpha_1 t} v_1, \dots, e^{\alpha_n t} v_n \right)$
 est un SFS de (E_0)

* Eq diff d'ordre n :

$$(E): x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t) x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t) x(t) + b(t)$$

$a_i: I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et $b: I \rightarrow \mathbb{K}$ continue

$$\text{on pose: } x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{K}^n \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

x sol^e de (E)ssi = X sol^e de $X' = AX + B$

Th de Cauchy Lipschitz = (E): $x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) + b(t)$

$\forall t_0 \in I, x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ fixées.

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique sol^e de classe $\mathcal{E}^1$

$$(E) \begin{cases} x \text{ sol^e de (E) et } x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique sol^e de $\mathcal{E}^n$

! Rq: (E₀): $x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t)$

$$(E'_0): X'(t) = A(t)X(t)$$

* / L'ensemble des sol^e de (E₀) est un sev de $\mathcal{E}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.

* / L'ensemble des sol^e de (E₀) est un sev de $\mathcal{E}^n(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.

Cas particulier = si $n=2$:

$$(E): x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

$$(E): X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

(2)

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

* Eq diff d'ordre 2 à coeff ctes =

$$(E): x''(t) = a x'(t) + b x(t) + c(t) = 0.$$

Eq homogène = $(E_0): x'(t) = a x'(t) + b x(t) = 0.$

→ éq caractéristique = $(E_c): r^2 + ar + b = 0.$

① si $K = \mathbb{C} =$

$$\Delta = a^2 - 4b$$

si $\Delta \neq 0$:

(E_0) admet 2 sol^s
 α_1, α_2 distincts
 $(e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t})$ S.F.S

si $\Delta = 0$

(E_c) admet 1 sol^s doubles
 $(e^{\alpha t}, t e^{\alpha t})$ S.F.S de (E_0)

② si $K = \mathbb{R} =$

$\Delta > 0$

$(e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t})$
S.F.S de (E_0)
(comme dans $\mathbb{C}$)

$\Delta = 0$

$(e^{\alpha t}, t e^{\alpha t})$
S.F.S de (E_0)
(comme dans $\mathbb{C}$)

$\Delta < 0$

(E_c) 2 sol^s complexes
conjugués = $\alpha + i\omega$,
 $\alpha - i\omega$ ($\omega \neq 0$)
 $(e^{\alpha t} \cos(\omega t), e^{\alpha t} \sin(\omega t))$
S.F.S de (E_0)

Sol^e particulière =

→ méthode de la variation des ctes = (x_1, x_2) S.F.S
 $x_p(t) = \alpha(t) x_1(t) + \beta(t) x_2(t)$

+ la condition = $\alpha' x_1(t) + \beta' x_2(t) = 0$

⇒ on obtient = $\alpha' x_1'(t) + \beta' x_2'(t) = c(t)$

⚠ = Rq = cherchons $y_p(t)$ tq =

$$(E): y''(t) + ay'(t) + by(t) = \underbrace{P(t) e^{kt}}_{\text{polynôme}}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \text{si } k \text{ n'est pas sol}^e \text{ de } (E_c) : y_p(t) = \varphi(t) e^{kt} \\ \rightarrow \text{si } k \text{ sol}^e \text{ simple de } (E_c) : y_p(t) = t \varphi(t) e^{kt} \\ \rightarrow \text{si } k \text{ sol}^e \text{ double de } (E_c) : y_p(t) = t^2 \varphi(t) e^{kt} \end{cases}$$

avec : φ = polynôme et $\deg(\varphi) = \deg(P)$.