

Réduction des Endomorphismes**Exercice 1**

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) A est nilpotente.

(ii) $Sp(A) = \{0\}$.

(iii) $\chi_A(X) = X^n$.

2. Déterminer les implications qui restent vraies lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que:

(i) $m_{ij} \geq 0 \forall 1 \leq i, j \leq n$.

(ii) $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1 \forall 1 \leq i \leq n$.

1. Montrer que $1 \in Sp(M)$ et donner un vecteur propre associé.

2. Prouver que pour tout $\lambda \in Sp(M)$, $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $Q, R \in \mathbb{R}[X]$.

1. Soit $D = Q \wedge R$. Montrer que $Im(D(u)) = Im(Q(u)) + Im(R(u))$.

2. On suppose que $Q \wedge R = 1$.

(a) Que vaut $ker(Q(u)) \oplus ker(R(u))$?

(b) Prouver que $ker(Q(u))$ est stable par $R(u)$ et que l'endomorphisme de $ker(Q(u))$ induit par $R(u)$ est injective.

(c) En déduire que $R(u)[ker(Q(u))] = ker(Q(u))$.

(d) On suppose que $QR(u) = 0$. Montrer que: $E = Im(Q(u)) \oplus Im(R(u))$, $Im(Q(u)) = ker(R(u))$ et $Im(R(u)) = ker(Q(u))$.

3. On suppose que $u^3 = -u$. Montrer que $Im(u) = ker(u^2 + Id_E)$ et $rg(u)$ est pair.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$ de multiplicité p . On note par $F_\lambda = ker(u - \lambda Id_E)^p$.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(\lambda) \neq 0$ et $E = F_\lambda \oplus ker(Q(u))$.

2. Justifier que F_λ et $ker(Q(u))$ sont stables par u .

3. On désigne par v (resp. w) l'endomorphisme de F_λ (resp. $ker(Q(u))$) induit par u .

- Montrer que $v - \lambda Id_{F_\lambda}$ est nilpotent.
- Calculer χ_v en fonction de λ et de $d = \dim(F_\lambda)$.
- Prouver que $\chi_u = \chi_v \chi_w$ et que $\chi_w(\lambda) \neq 0$.
- En déduire que $\dim(F_\lambda) = p$.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et F, G deux sev supplémentaires de E de même dimension n . On considère s une symétrie de F avec $s \notin \{Id_F, -Id_F\}$. Soit g un isomorphisme de F dans G et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par:

$$\begin{aligned} \text{si } x &= x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F \text{ et } x_2 \in G \\ f(x) &= g(x_1) + g^{-1}(x_2) + s(x_1). \end{aligned}$$

- Montrer que $f \in GL(E)$.
- Soit $\lambda \in Sp(f)$ et $x = x_1 + x_2 \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$. Montrer que $\lambda \neq 0$, $x_1, x_2 \neq 0$ et $\lambda - \frac{1}{\lambda} \in Sp(s)$.
- Réciproquement, soit $\alpha \in Sp(s)$, montrer qu'il existe $\lambda \in Sp(f)$ tel que $\lambda - \frac{1}{\lambda} = \alpha$.
- Déduire toutes les valeurs propres de f .
- Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de $\ker(s + Id_F)$ et $\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ une base de $\ker(s - Id_F)$.
 - Montrer que $\{e_1, \dots, e_n, g(e_1), \dots, g(e_n)\}$ est une base de E .
 - Déterminer des vecteurs propres de f associés à chacune des valeurs propres de f .
 - Déterminer $\dim(E_\lambda(f))$ pour tout $\lambda \in Sp(f)$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$$P \mapsto P(X+1) + XP'(X)$$

Il est clair que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

- Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- En déduire les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
- Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P_n) = (n+1)P_n$.
- Prouver que $\deg(P_n) = n$.
- Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, f(P_n^{(k)}) = (n+1-k)P_n^{(k)}$.

6. Déduire une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des vecteurs propres de f .

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} b & a & . & . & a \\ a & b & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & a \\ a & . & . & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), a \neq 0.$

1. Déterminer $\text{rg}(A - (b - a)I_n)$.
2. Déterminer alors toutes les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité. En déduire que A est diagonalisable et diagonaliser A .
3. Que vaut $\det(A), A^p$?

Exercice 8

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $X^n P(\frac{1}{X}) \in \mathbb{R}_n[X]$.

2. On pose $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $P \mapsto X^n P(\frac{1}{X})$. Il est clair que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

(a) Calculer f^2 , en déduire que f est diagonalisable et donner $\text{Sp}(f)$.

(b) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Diagonaliser f .

Exercice 9

Soient A et $B \in M_4(\mathbb{C})$ tels que $AB = -BA$ et $A^2 = B^2 = I_4$.

1. Montrer que A et B sont diagonalisables et trouver leurs valeurs propres.
2. En calculant $\text{tr}(BAB)$ de deux manières, montrer que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$.
3. Déterminer les multiplicités des valeurs propres de A .

Exercice 10

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $\text{tr}(M^i) = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que si M admet comme valeurs propres non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ alors:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_k \lambda_k^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^k + \dots + \alpha_k \lambda_k^k = 0 \end{cases}$$

2. En déduire que M est nilpotente si et seulement si, $\text{tr}(M^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 11

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $A^3 = A^2$.

- Montrer que A est trigonalisable.
- Prouver que $\text{tr}(A) \in \mathbb{N}$.
- Montrer que si $\text{tr}(A) = 0$ alors $A^2 = 0$ et si $\text{tr}(A) = n$ alors $A = I_n$.
- Montrer que A^2 est diagonalisable.
- Montrer que A est diagonalisable $\Leftrightarrow A^2 = A \Leftrightarrow \text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$.

Exercice 12

Soit E un k -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère le commutant de u définie par:

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$$

- Montrer que $C(u)$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- Montrer que si $v \in C(u)$ alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v .
- Soit $v \in C(u)$: On suppose que u et v sont diagonalisables. Montrer qu'il existe B une base de E tel que $M_B(u)$ et $M_B(v)$ sont diagonales.
- On suppose que u admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes. Soit x un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ et $v \in C(u)$.

- Que peut on dire de u ?
- Déterminer $E_\lambda(u)$ en fonction de x .
- Montrer que x est aussi un vecteur propre de v .
- Déduire que v est diagonalisable dans une même base que u .
- Montrer qu'il existe un unique $P \in k_{n-1}[X]$ tel que $P(u) = v$.
- Déduire que $C(u) = \text{vect}\{Id_E, u, \dots, u^{n-1}\}$.
- Prouver que $\dim(C(u)) = n$.

5. Application. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $M_{B_c}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que u est diagonalisable et diagonaliser u .
- Déterminer tous les endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v^2 = u$.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g - g \circ f = 2f$.
Soit v un vecteur propre de g associée à la valeur propre λ .

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $g \circ f^k(v) = (\lambda + 2k) f^k(v)$.
2. Montrer qu'il existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $f^k(v) = 0$.
3. Dédire que $f \notin GL(E)$.
4. Prouver que si g est diagonalisable alors f est nilpotent.
5. On suppose que $n = 2$, montrer que $f^2 = 0$.

Exercice 14

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & \dots & a_2 \\ a_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

On pose $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$.

1. Montrer que $\forall p \in \{1, \dots, n-1\}$, $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_{n-p} & 0 \end{pmatrix}$ et $J^n = I_n$.
2. Exprimer A en fonction de J .
3. Prouver que J est diagonalisable.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de J et diagonaliser J .
5. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A .
6. En déduire que:

$$\det(A) = \prod_{0 \leq k \leq n-1} P(w^k) \text{ où } w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Exercice 15

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{k}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k}).$

On pose $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$

1. Montrer que $\chi_M(X) = P$.

2. Soit $\lambda \in sp({}^t M)$, déterminer $E_\lambda({}^t M)$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
4. Déduire que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ deux à deux distincts alors la matrice de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
 est inversible.
5. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $M^i E_1 = E_{i+1}$ avec $\{E_1, \dots, E_n\}$ est la base canonique de $M_{n1}(k)$.
6. Déduire que $\pi_M = \chi_M$ et retrouver 3.

Exercice 16

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $(f - Id)^3 (f + 2Id) = 0$.
 - (a) Montrer que f est trigonalisable.
 - (b) On suppose de plus que $(f - Id)^2 (f + 2Id) \neq 0$. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
2. On suppose que f^2 est un projecteur.
 - (a) Quelles sont les valeurs propres éventuelles de f ?
 - (b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

Exercice 17

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $rg(A) = 1$.

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. Justifier l'existence de X et $Y \in M_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A = X {}^t Y$.
3. Prouver que $A^2 = tr(A)A$.
4. Déduire que A est diagonalisable si et seulement si $tr(A) \neq 0$.
5. Déterminer π_A et retrouver 1 et 4.

Exercice 18

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a , le rang de $M - (1 + 3a)I_3$.
2. Quelle valeur propre de M at-on mise en évidence? Préciser la dimension du sous espace propre associé.
3. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M ? puis déterminer les valeurs propres de M .
4. Prouver que M est trigonalisable.
5. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles M est diagonalisable.
6. Montrer que pour $a \neq -\frac{1}{3}$, M est inversible et donner M^{-1} .

Exercice 19

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie n et $f \in GL(E)$.

1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable.
2. Le résultat reste-t-il vrai si f n'est pas bijective ou si E est un $\mathbb{R}$ -ev?

Exercice 20

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Déterminer χ_A .
2. Montrer que A est trigonalisable et non diagonalisable.
3. Sans faire de calcul montrer que $\ker(f - I) \subsetneq \ker(f - I)^2$ avec $I = Id_{\mathbb{R}^3}$.
4. Soit $v_3 \in \ker(f - I)^2 \setminus \ker(f - I)$ et $v_2 = (f - I)(v_3)$. Montrer que $\{v_2, v_3\}$ est une base de $\ker(f - I)^2$.
5. Prouver que $\ker(f) = \text{vect}\{v_1\}$ avec $v_1 = (1, -1, -1)$.
6. Sans calculer v_2 et v_3 montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Dédurre une trigonalisation de A .
8. Déterminer une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N tel que $A = D + N$ avec $DN = ND$.
9. Donner A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
avec $AB = BA$

1. Comparer $sp(M)$ et $sp(A)$.

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, calculer $P(M)$.

(b) En déduire que M est diagonalisable si et seulement si $B = 0$ et A est diagonalisable.

Exercice 22

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\gamma_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & u \circ f \end{array}$$

1. Vérifier que $\gamma_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

2. Montrer que u et γ_u ont les mêmes valeurs propres et que pour tout $\lambda \in Sp(u)$, on a $E_\lambda(\gamma_u) = \{f \in \mathcal{L}(E) : \text{Im}(f) \subset E_\lambda(u)\}$.

3. Montrer que $\dim(E_\lambda(\gamma_u)) = n \dim(E_\lambda(u))$ pour tout $\lambda \in Sp(u)$.

4. Déduire que γ_u est diagonalisable si et seulement si u l'est aussi.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $P(\gamma_u) = \gamma_{P(u)}$.

6. Retrouver alors 14.

Exercice 23

Soit E un $\mathbb{k}$ -ev de dimension $n \geq 2$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables avec $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

2. Montrer qu'il existe b base de E telle que $M_b(f) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$ et $M_b(g) = \begin{pmatrix} \alpha & L' \\ 0 & M' \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \lambda \in \mathbb{k}$, $L, L' \in M_{1, n-1}(\mathbb{k})$ et $M, M' \in M_{n-1}(\mathbb{k})$.

3. Vérifier que M et M' sont trigonalisables et que $MM' = M'M$.

4. Soit $P \in GL_{n-1}(\mathbb{k})$, vérifier que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{k})$ et déterminer Q^{-1} .

5. En déduire qu'il existe B base de E telle que $M_B(f)$ et $M_B(g)$ sont triangulaires supérieures.

6. Montrer que si g est nilpotent alors $\det(f + g) = \det(f)$.

- Ex 3 :

1/ $D = \Phi \wedge R$

$\exists P, S \text{ tq } D = \Phi P + SR$

$D(u) = \Phi(u) \circ P(u) + S(u) \circ R(u)$

soit $y \in \text{Im}(D(u))$, $\exists x \in E \text{ tq } :$

$y = D(u)(x)$

$D(u)(x) = \underbrace{\Phi(u)(P(u)(x))}_{\in \text{Im}(\Phi(u))} + \underbrace{R(u)(S(u)(x))}_{\in \text{Im}(R(u))}$

alors : $\text{Im } D(u) \subset \text{Im } \Phi(u) + \text{Im } R(u)$

$\forall D/\Phi \Rightarrow \Phi = DD_1$

soit $x \in \text{Im } \Phi(u)$

$x = \Phi(u)(x_1)$

$\Phi(u)(x_1) = D(u) \circ D_1(u)(x_1)$
 $= D(u) \left(\underbrace{D_1(u)(x_1)}_{\in \text{Im } D(u)} \right)$

$\Rightarrow \text{Im } \Phi(u) \subset \text{Im } D(u)$

De m, $\text{Im } R(u) \subset \text{Im } D(u)$

Donc : $\text{Im } R(u) + \text{Im } \Phi(u) \subset \text{Im } D(u)$

2/ $\Phi \wedge R = 1$

a/ lemme des noyaux :

$\underbrace{\text{Ker}(\Phi \circ R)(u)}_{\text{Ker}(\Phi(u) \circ R(u))} = \text{Ker } \Phi(u) \oplus \text{Ker } R(u)$

b/ $R(u) \circ \Phi(u) = \Phi(u) \circ R(u)$

alors : $\text{Ker } \Phi(u)$ est stable par $R(u)$.

$R(u)|_{\text{Ker } \Phi(u)} : \text{Ker } \Phi(u) \longrightarrow \text{Ker } \Phi(u)$
 $x \longmapsto R(u)(x)$

soit $x \in \text{Ker } \Phi(u)$ tq $R(u)(x) = 0$

alors $x \in \text{Ker } R(u)$ or $= \text{Ker } \Phi(u) \cap \text{Ker } R(u)$

$\rightarrow x = 0$

$= \{0\}$

ainsi : $R(u)|_{\text{Ker } \Phi(u)}$ est injectif.

c/ $R(u)|_{\text{Ker } \Phi(u)}$ est inj donc :

$\xrightarrow{\text{inj}} R(u)|_{\text{Ker } \Phi(u)} = \text{Ker } \Phi(u)$ bijectif
(dimension finie)

d/ $\Phi R(u) = 0$

$\Rightarrow E = \text{Ker } R(u) \oplus \text{Ker } \Phi(u)$

mq : $\text{Ker } \Phi(u) = \text{Im } R(u)$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \Phi(u) = R(u)(\text{Ker } \Phi(u))$

$\Rightarrow \text{Ker } \Phi(u) \subset \text{Im } R(u)$

$\Phi(u) \circ R(u) = 0$

$\Rightarrow \text{Im } R(u) \subset \text{Ker } \Phi(u)$

D'aut : $\boxed{\text{Im } R(u) = \text{Ker } \Phi(u)}$

ou bien :

1/ $\Rightarrow \underbrace{\text{Im}(\text{Id}_E)}_{= E} = \text{Im } \Phi(u) + \text{Im } R(u)$

De plus : $\dim E = \dim(\text{Ker } \Phi(u)) + \dim(\text{Ker } R(u))$

$n = n - \dim(\text{Im } \Phi(u)) + n - \dim(\text{Im } R(u))$

$\underbrace{n}_{\dim(E)} = \dim(\text{Im } \Phi(u)) + \dim(\text{Im } R(u))$

$\Rightarrow \text{Im } \Phi(u) \oplus \text{Im } R(u) = E$.

Ex 4 :

1/ $\lambda \in \text{Sp}(u)$ de multiplicité p

$\chi_u(x) = (x - \lambda)^p \times \varphi(x)$ avec $\varphi(\lambda) \neq 0$

$(x - \lambda)^p \wedge \varphi(x) = 1$

$\underbrace{\text{Ker}(\chi_u(u))}_{= E} = \underbrace{\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^p}_{F_\lambda} \oplus \text{Ker } \varphi(u)$

2/

①

$$\gamma) v: F_\lambda \rightarrow F_\lambda \\ x \mapsto u(x)$$

$$w: \ker \varphi(u) \rightarrow \ker \varphi(u) \\ x \mapsto u(x)$$

$$a) \text{ soit } x \in F_\lambda = \ker (u - \lambda \text{id}_E)^p \\ (v - \lambda \text{id}_{F_\lambda})^p(x) = (u - \lambda \text{id}_E)^p(x) = 0.$$

$\Rightarrow v - \lambda \text{id}_{F_\lambda}$ est nilpotent d'indice $\leq p$.

$$b) \chi_{v - \lambda \text{id}_{F_\lambda}} = X^d, \quad d = \dim(F_\lambda)$$

$$\text{soit: } \chi_{v - \lambda \text{id}_E} = \det(X \text{id}_E - v + \lambda \text{id}_E) \\ = \det((X + \lambda) \text{id}_E - v) \\ = \chi_v(X + \lambda) = X^d$$

$$\Rightarrow \chi_v(x) = (x - \lambda)^d.$$

$$\text{ou bien: } S_p(v - \lambda \text{id}) = \{0\} \\ \Rightarrow S_p(v) = \{\lambda\}$$

or χ_v est scindé car on travaille dans $\mathbb{C}$. $\Rightarrow \chi_v(x) = (x - \lambda)^d$
 $d = \dim(F_\lambda)$.

$$c) E = F_\lambda \oplus \ker \varphi(u) \\ B = B_1 \cup B_2$$

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(v) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(w) \end{pmatrix}$$

$$\det(X I_n - M_B(u)) =$$

$$\begin{pmatrix} X I_d - M_{B_1}(v) & 0 \\ 0 & X I_{n-d} - M_{B_2}(w) \end{pmatrix} \\ = \det(X I_d - M_{B_1}(v)) \times \det(X I_{n-d} - M_{B_2}(w))$$

$$\Rightarrow \chi_u = \chi_v \chi_w.$$

$$* \text{ supposons que: } \chi_w(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 \in S_p(w)$$

$$\Rightarrow \exists x \neq 0 \quad \text{t.q. } w(x) = 1x \\ x \in \ker \varphi(u) \quad u(x) = 1x$$

$$\Rightarrow x \in \ker(u - \lambda \text{id}) \\ \subset \ker(u - \lambda \text{id})^p$$

$$\Rightarrow x \in F_\lambda$$

$$\Rightarrow x \in \ker \varphi(u) \cap F_\lambda = \{0\} \quad \text{absurde} \\ x=0$$

$$d) \text{ d'une part: } \chi_u = (X - \lambda)^p \times \varphi \\ \text{avec } \varphi(\lambda) \neq 0, \text{ d'autre part,}$$

$$\chi_u = \chi_v \chi_w \\ = (X - \lambda)^d \times \chi_w \text{ avec } \chi_w(\lambda) \neq 0$$

$$d: \text{multi de } \lambda \quad \underline{d} = d = p \\ \underline{\dim(F_\lambda) = p}$$

Ex6:

$$f: \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P \mapsto P(x+1) + x P'(x)$$

$$1/ f(x^k) = (x+1)^k + x^k k \\ = \sum_{i=0}^k C_k^i x^i + k x^k \\ = (k+1)x^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i x^i$$

$$f(1) = 1$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(x) & \dots & f(x^k) & \dots & f(x^n) \\ 1 & 1 & \dots & C_k^0 & \dots & C_n^0 \\ 0 & 2 & \dots & C_k^1 & \dots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (k+1) & \dots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (n+1) \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ x^{n+1} \end{matrix}$$

2)

$$2) Sp(f) = \{1, \alpha, \dots, n+1\}$$

f admet $n+1$ vp $\alpha \neq \beta$ et

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$$

$\Rightarrow f$ est diagonalisable.

$$\chi_f(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - k)$$

$$\dim(E_k(f)) = 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, n+1\}$$

3) $(n+1) \in Sp(f)$ alors: $\exists P \neq 0$ tq

$$f(P) = (n+1)P$$

on pose: $P_n = \frac{1}{c(P)} \cdot P$ avec: $c(P)$ = le coeff dominant de P .

$$\Rightarrow f(P_n) = (n+1)P_n$$

$\times$ unicité:

supposons: $\exists Q_n$ tq: $f(Q_n) = (n+1)Q_n$

et Q_n : unitaire.

$$\text{on a: } \dim(E_{n+1}(f)) = 1$$

or Q_n et $P_n \in E_{n+1}(f)$

$\Rightarrow Q_n$ et P_n sont colinéaires or

les deux sont unitaires $\Rightarrow \underline{Q_n = P_n}$

4) soit: $r = \deg(P_n)$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k, \quad a_r = 1 \quad (\text{unitaire})$$

$$f(P_n) = (n+1)P_n$$

$$P_n(x+1) + x P_n'(x) = (n+1)P_n(x)$$

$$\sum_{k=0}^r a_k (x+1)^k + x \sum_{k=1}^r k a_k x^{k-1} = (n+1) \sum_{k=0}^r a_k x^k$$

$$\text{coeff d'ordre } r: \begin{cases} a_r x^r + a_r r x^r = (n+1) a_r x^r \\ a_r x^r (1+r) = (n+1) a_r x^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{r=n}$$

5/ Pour $k=0$: $f(P_n) = (n+1)P_n$ vrai

$$\text{supp que: } f(P_n^{(k)}) = (n+1-k)P_n^{(k)}$$

$$mq = f(P_n^{(k+1)}) = (n-k)P_n^{(k+1)}$$

$$f(P_n^{(k)})' = [(n+1-k)P_n^{(k)}]'$$

$$[P_n^{(k)}(x+1) + x P_n^{(k+1)}(x)]' = (n+1-k)P_n^{(k+1)}$$

$$P_n^{(k+1)}(x+1) + x P_n^{(k+1)}(x) + P_n^{(k+1)}(x) = (n+1-k)P_n^{(k+1)}$$

$$\Rightarrow f(P_n^{(k+1)}) = (n-k)P_n^{(k+1)}$$

6/ on pose: $\alpha_k = n+1-k$

$$\text{on a: } f(P_n^{(k)}) = (n+1-k)P_n^{(k)}$$

$$\deg(P_n) = n \text{ alors } \forall 0 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow P_n^{(k)} \neq 0.$$

ainsi $\forall 0 \leq k \leq n$, $P_n^{(k)}$ est un vect propre de f .

$$B = (P_n, P_n', \dots, P_n^{(n)})$$

B est une famille de polynômes à degré échelonné.

$\Rightarrow B$ est libre.

$$\text{card}(B) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

11 = B est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

formé par des vecteurs propres de f

ou bien: B est une famille des vect propres associés à des vp $\alpha \neq \beta$

$\Rightarrow B$ est libre.

- Ex 7:

$$1/ \text{rg}(A - (b-a)I_n) = 1$$

$$b/ \dim(\text{Ker}(A - (b-a)I_n)) = n-1$$

$$\dim(E_{b-a}(A)) = n-1$$

$\Rightarrow b-a$ est une vp de multi $\geq n-1$

③

soit α : même vp de A.

$$\underbrace{tr(A)}_{nb} = \alpha + (b-a)(n-1)$$

$$\Rightarrow -\alpha = nb - a(n-1) - b - nb$$

$$\alpha = b + (n-1)a \neq (b-a)$$

$(b-a)$ de multi $(n-1) = \dim(E_{b-a}(A))$

α est vp simple de A

$\Rightarrow$ A est diagonalisable.

$$\chi_A(x) = (x-\alpha)(x+b-a)^{n-1}$$

* soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$x \in E_{b-a}(A) \Leftrightarrow Ax = (b-a)x$$

$$\Leftrightarrow (A - (b-a)I_n)x = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x_1 + \dots + x_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n = -x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$$

$$E_{b-a}(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x \in E_{\alpha}(A) \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (-n+1)a & a & \dots & a \\ a & & & \\ \vdots & & & \\ a & & & (-n+1)a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-n+1)x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 + (-n+1)x_2 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + (-n+1)x_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = nx_n \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P D P^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} (b-a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (b-a) & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (b-a)^{n-1} \alpha.$$

Ex 10: $M \in M_n(\mathbb{C})$

1/ $\text{tr}(M^i) = 0 \quad \forall i$

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les vp non nulles de M
 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leur multiplicité.

$M \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow M$ trigonalisable.

$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), T$ triangulaire sup

$M = PTP^{-1}$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$\text{tr}(M) = \text{tr}(T) \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i = 0.$

$M^i = PT^iP^{-1}$

$$T^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k^i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k^i \end{pmatrix}$$

$\text{Tr}(M^i) = \text{Tr}(T^i) \Rightarrow \sum_{p=1}^k \alpha_p \lambda_p^i = 0.$

$\stackrel{?}{=} \text{tr}(M^i) = 0$ mq M nilpotent? $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

2) $A, S_p(A) = \{\alpha\} \Rightarrow A$ diag $\underline{m} = A = \alpha I_n$
 A nilpotent $\Rightarrow A$ diag $\underline{m} = A = 0_{n \times n}$

mq $S_p(M) = \{0\}$?

supposons que M admet des vp autres que 0.
on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ces vp et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ leurs multiplicités

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_k \lambda_k^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^k + \dots + \alpha_k \lambda_k^k = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^k & \dots & \lambda_k^k \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_k) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

$\Rightarrow A$ inversible absolue car =

$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{S} = S_p(M) = \{0\}$
 $M \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \chi_M = X^n$
 $\Rightarrow M$ nilpotente.

$\Rightarrow$ Si M est nilpotent $\Rightarrow M^i$ nilpotent $\forall i$

$S_p(M^i) = \{0\}$

$\Rightarrow \text{tr}(M^i) = 0, \forall i.$

Ex 12:

$C(u) = \{v \in L(E) / u \circ v = v \circ u\}$

1/ $I_E \circ u = u \circ I_E = u \Rightarrow I_E \in C(u)$

$v, w \in C(u), \alpha \in \mathbb{K}$

$(\alpha v + w) \circ u = \alpha v \circ u + w \circ u$
 $= \alpha u \circ v + u \circ w$
 $= u \circ (\alpha v + w)$

$\Rightarrow (\alpha v + w) \in C(u)$

$(v \circ w) \circ u = v \circ w \circ u$
 $= v \circ u \circ w = u \circ (v \circ w)$

$\Rightarrow (v \circ w) \in C(u). \quad \square$

$\Rightarrow C(u)$ est s. algèbre de $d(E)$.

a) $v \circ u = u \circ v$ mq: $E_{\lambda}(u)$ stable par v ?
soit $x \in E_{\lambda}(u)$, mq $v(x) \in E_{\lambda}(u)$?

en effet, $u(v(x)) = v(u(x))$
 $= v(\lambda x) = \lambda v(x)$.

b) $v \in C(u)$

u et v diag

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de u .

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$$

soit v_i induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$

v_i diag car v diag.

soit B_i base de $E_{\lambda_i}(u)$ formé par des vecteurs propres de v_i .

soit $B = B_1 \cup \dots \cup B_p$ est une base de E formé des vecteurs propres en commun de u et v .

ainsi $M_B(u)$ et $M_B(v)$ sont diagonales.

a) a/ u admet n vp distinctes $\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé à racines simples
 $\Rightarrow u$ est diag.

b/ $E_{\lambda}(u) = \text{vect}(x)$

en effet, $x \in E_{\lambda}(u)$, $x \neq 0$ et

$$\dim(E_{\lambda}(u)) = 1$$

c) $v \circ u = u \circ v$

$\Rightarrow E_{\lambda}(u)$ est stable par v .
 $= \text{vect}(x)$

$\Rightarrow x$ est un vecteur propre de v .

d/ u est diag alors u admet une base B formé des vecteurs propres de u
 $u \xrightarrow{C} B$ est aussi formé des vecteurs propres de $v \Rightarrow v$ admet une base des vecteurs propres $\Rightarrow v$ est diag dans la même base. (6)

Rappel: interpolation de Lagrange
on a $x_1, \dots, x_n$ et $\alpha_i \neq \alpha_j$
 $\in \mathbb{K}$

$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ qlq.

$\exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$ tq: $P(x_i) = y_i$

e/ $\exists B$ une base de E tq:

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_i \neq \alpha_j \\ \forall i \neq j \end{matrix}$$

$$M_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_i \neq \alpha_j \forall i \neq j$, I. Lagrange $\exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$

tq: $P(\alpha_i) = \lambda_i, \forall i$

$$\Rightarrow P \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(M_B(u)) = M_B(v)$$

$$\Rightarrow M_B(P(u)) = M_B(v)$$

$$\Rightarrow \underline{P(u) = v}$$

f/ $\forall v \in C(u)$, $\exists P \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$ tq: $P(u) = v$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$$

$$P(u) = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$$

$$\Rightarrow v \in \text{vect}\{\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}\}$$

Inversement, si $v \in \text{vect}\{\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}\}$

alors $\exists \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tq:

$$v = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$$

$$v \circ u = u \circ v$$

$$\Rightarrow \text{vect}\{\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}\} \subset C(u)$$

8/ $m_q = \{Id_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est libre?

supposons $=(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (0, \dots, 0) t_q$

$$\alpha_0 Id_E + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1} = 0.$$

ainsi: $P(u) = 0$ avec: $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$

P est annulateur et $\deg(P) \leq n-1$

$$\Rightarrow m_u/p \Rightarrow \deg(m_u) \leq n-1$$

or u admet n vp a à $a \neq$

ainsi, $m_u = \chi_u$ (s.r.s)

$\deg(m_u) = n$ absurde.

$$5/ \chi_u(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x((x-3)^2 - 1)$$

$$= x(x-2)(x-4)$$

$\Rightarrow \chi_u(x)$ est scindé à racines simples

alors: u est diagonalisable.

$$\exists B \text{ tq } M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b/ $v \in d(E)$ tq: $v^2 = u$.

on a:

$$v \circ u = v^3 = v^2 \circ v = u \circ v$$

ainsi: $v \in C(u)$

et u admet 3 vp a à $a \neq$

$\Rightarrow v$ est diag et dans la

base B des vecteurs propres de u

ainsi: $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$ tq:

$$M_B(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$v^2 = u \text{ (E) } M_B(v^2) = M_B(u)$$

$$\text{(E) } \begin{cases} \alpha_1^2 = 0 \\ \alpha_2^2 = 2 \\ \alpha_3^2 = 4 \end{cases}, \alpha_3 = 4$$

$$\text{ainsi } M_B(v) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ex15:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$P(x) = x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0$$

$$4/ \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$$

$$= \begin{vmatrix} x & & & -a_0 \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & x & -a_{n-1} \\ & & & -1 & x - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + \dots + x^{n-1}L_n$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & & & -P(x) \\ -1 & x & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & -1 \\ & & & -1 & x - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

dévelop. 1ère ligne:

$$= (-1)^{n+1} P(x) (-1)^{n-1} = P(x)$$

2ème méthode = par récurrence sur la taille de matrice

$$n=2: \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x - a_1 \end{vmatrix} = x^2 - a_1 x - a_0$$

supposons le résultat pour $n-1$

mq pour n :

dévelop. 1ère ligne:

$$\chi_M(x) = x P(x) - a_0$$

(7)

avec :

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} x & & & -a_1 \\ & \ddots & & \\ & & x & \\ & & & -1 \\ & & & & x - a_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\text{H.R. } x^{n-1} - a_{n-1}x^{n-2} - \dots - a_1$$

$$\Rightarrow \chi_M(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0$$

est diag dans $M_n(\mathbb{C})$ seulement.

⚠ exemple : $x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & -1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \chi_M(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$

$$(x-1) \prod_{k=1}^n \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} \right) = (x-1) R(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = \prod_{k=1}^n \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} \right) \text{ est}$$

scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[x]$

$$t_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ a_0 & & & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 = \lambda^3 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^n x_1 \\ a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n = \lambda x_n (*) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow x_1 (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} - \lambda^n) = 0 \text{ récurrence =}$$

$$\Rightarrow x_1 (-P(\lambda)) = 0$$

ou $P(\lambda) = 0$ (*) est tj vrai

$$\Rightarrow E_\lambda(t_M) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right\}$$

3) M est diagssi : t_M diagssi :

$\forall \lambda \in \text{Sp}(t_M), \dim(E_\lambda(t_M)) = m_\lambda$ et

$\chi_{t_M}(x)$ est scindé.

or $\dim(E_\lambda(t_M)) = 1 \forall \lambda \in \text{Sp}(t_M)$

alors χ_M est scindé à racines simples

4) si $\lambda \in \text{Sp}(t_M), E_\lambda(t_M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right)$

soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ à $a \neq$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right) = B$$

B est une base de vecteur propres de t_M avec M = matrice compagnon dont le polynôme = $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$

$\Rightarrow P$ est scindé à racines simples

$\Rightarrow t_M$ diag.

5/

$$M = \begin{pmatrix} ME_1 & ME_2 & \dots & ME_n \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{matrix}$$

$$ME_1 = E_2$$

$$ME_2 = E_3$$

$$\vdots$$

$$ME_{n-1} = E_n$$

pour $i=1$ on a $ME_1 = E_2$ mais

supposons que $M^i E_1 = E_{i+1}$

mq $M^{i+1} E_1 = E_{i+2}$

$$M^{i+1} E_1 = M(M^i E_1) = M E_{i+1} = E_{i+2}$$

6/ on a $\deg(\chi_M) = n$ et π_M / χ_M

π_M et χ_M sont unitaires

$\Rightarrow$ Il suffit de mq $\deg(\pi_M) = n = \deg$

supposons que: $\deg(\pi_M) \leq n-1$

$$\pi_M(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$$

$$\left(\begin{array}{c} M \\ \downarrow \end{array} \right) \pi_M(M) = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} E_1 \\ \downarrow \end{array} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k E_1 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k E_{k+1} = 0 \quad \text{or } \{E_1, \dots, E_n\} \text{ base de } M_{n+1}(K)$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$\Rightarrow \pi_M = 0 \quad \text{absurde.}$$

- Ex 17 :

$$1/ \operatorname{rg}(A) = 1$$

$$\dim(\ker(A)) = n-1$$

0 est une vp et $m_0 \geq n-1$

$\Rightarrow \chi_A(x) = x^{n-1}(x-\lambda)$ est scindé
alors: A est trigonalisable. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

2/ $\operatorname{rg}(A) = r \Leftrightarrow A$ équivalente à J_r

$$\operatorname{rg}(A) = 1 \Rightarrow \exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq:}$$

$$\Rightarrow A = P J_1 Q$$

$$\text{avec: } J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{E_1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P E_1 t_{E_1} Q \quad \text{si } P \text{ inversible} \quad \Delta$$

$$= \underbrace{P E_1}_X \cdot \underbrace{t_{E_1} Q}_{t_Y}$$

$$3/ A = x t_y$$

$$A^2 = x t_y x t_y$$

$$= \alpha x t_y = A$$

$$mq: \alpha = \operatorname{tr}(A) ?$$

$$t_y x \in M_{11}(\mathbb{R}) = \text{scalaire}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(x t_y)$$

$$= \operatorname{tr}(t_y x) = \operatorname{tr}(\alpha) = \alpha.$$

$$4) A^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A.$$

$$\text{si } \operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = 0$$

$$\Rightarrow A \text{ nilpotent or } A = 0$$

donc A n'est pas diagonalisable.

$$\text{si } A \text{ diag} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) \neq 0$$

$$\text{si } \operatorname{tr}(A) \neq 0$$

$$\Rightarrow A^2 - \operatorname{tr}(A) A = 0$$

$$\Rightarrow A(A - \operatorname{tr}(A) I_n) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - \operatorname{tr}(A)) \text{ est annulateur de } A$$

scindé à racines simple $\Rightarrow A$ diag.

$$5) x(x - \operatorname{tr}(A)) \text{ est annulateur de } A$$

$$\Rightarrow \pi_A / x(x - \operatorname{tr}(A))$$

$$\Rightarrow \pi_A(x) = x \text{ ou } \pi_A = x - \operatorname{tr}(A) \text{ ou}$$

$$\pi_A(x) = x(x - \operatorname{tr}(A))$$

$$\pi_A(x) = x \text{ impossible car: } A \neq 0$$

$$\operatorname{rg}(A) = 1$$

$$\pi_A(x) = x - \operatorname{tr}(A) \Rightarrow A = \operatorname{tr}(A) I_n$$

$$\text{or } \operatorname{rg}(A) = 1$$

$$\begin{cases} \text{si } \operatorname{tr}(A) = 0 \\ \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 0 \\ \text{si } \operatorname{tr}(A) \neq 0 \\ \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = n \end{cases}$$

$$\text{D'ail: } \pi_A(x) = x(x - \operatorname{tr}(A))$$

$$\text{si } n \geq 2$$

1^{ère} méthode =

$$\pi_A \text{ scindé} \Rightarrow \chi_A \text{ scindé} \Rightarrow A \text{ trigo}$$

2^{ème} méthode =

$$\text{si } \operatorname{tr}(A) \neq 0 \Rightarrow \pi_A \text{ s.r.s} \Rightarrow A \text{ diag} \Rightarrow A \text{ trigo}$$

$$\text{si } \operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow A \text{ nilpotent} \Rightarrow A \text{ trigo.}$$

(9)

$$\pi_A(x) = x(x - \text{tr}(A))$$

A diago s.r.s : π_A s.r.s ssi : $\text{tr}(A) \neq 0$

Ex 19 :

1/ " $\Rightarrow$ " f diago

$\exists B$ une base de E / $M_B(f) = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ A n'est pas diago dans $\mathbb{R}$.

$$M_B(f^2) = (M_B(f))^2 = \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2) \quad \chi_A(A) = 0$$

" $\Leftarrow$ " f^2 diago

π_{f^2} s.r.s, $f \in \text{Gd}(E) \Rightarrow f^2 \in \text{Gd}(E)$
 $\Rightarrow 0 \notin \text{Sp}(f^2)$

$$\pi_{f^2}(x) = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i) \quad \begin{cases} \alpha_i \neq \alpha_j \quad \forall i, j \\ \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

$$\text{on a : } \pi_{f^2}(f^2) = 0$$

$$\text{alors : } \prod_{i=1}^d (f^2 - \alpha_i \text{id}) = 0$$

$$\text{soit } \beta_i = \alpha_i$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^d (f - \beta_i \text{id})(f + \beta_i \text{id}) = 0.$$

$$\text{on pose : } \varphi(x) = \prod_{i=1}^d (x - \beta_i)(x + \beta_i)$$

$$\text{comme : } \alpha_i \neq \alpha_j \text{ et } \alpha_i \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ s.r.s} = f \text{ admet un poly annulateur s.r.s}$$

$$\Rightarrow f \text{ diago.}$$

2/ Contre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & - & - & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ 0 & - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 0 \Rightarrow A^2 \text{ diagonale}$$

et A nilpotente non nulle

$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

si $f \notin \text{Gd}(E) \Rightarrow$ le résultat est faux.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$$

χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

A n'est pas diago dans $\mathbb{R}$.

$$\chi_A(A) = 0$$

$$(A - I_3)(A^2 + I_3) = 0 \Rightarrow (A^2 - I_3)(A^2 + I_3) = 0.$$

$$P(x) = (x-1)(x+1) \text{ annulateur s.r.s de } A$$

$\Rightarrow A^2$ diago dans $\mathbb{R}$.

Détaille n : si n : pair : $p = n/2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

$$\chi_A(x) = \prod_{k=1}^p (x^2 + k^2)$$

$$\chi_A(A) = 0$$

$$\prod_{k=1}^p (A^2 + k^2 \text{id})$$

$$P(x) = (x + k^2)$$

on ajoute 1 si n impair
 annulateur s.r.s

Ex 20 =

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ $\chi_A(x) = x(x-1)^2$

2/ χ_A est scindé alors A est trigonalisable

$$\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \dim(E_1(A)) = 1 < m_1 = 2$$

$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

3/ $\text{Ker}(f - \text{Id}) \subsetneq \text{Ker}(f - \text{Id})^2$?

$$x \in \text{Ker}(f - \text{Id})$$

$$\Rightarrow (f - \text{Id})(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$(f - \text{Id})(\underbrace{(f - \text{Id})(x)}_0) = (f - \text{Id})(0) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \text{Ker}(f - \text{Id})^2$$

on a: $\chi_A(x) = x(x-1)^2$

$$\chi_A(A) = 0$$

$$x \wedge (x-1)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ détermine des maximaux.

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})^2$$

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})^2) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker } f) = 3 - 1 = 2$$

$$\mathcal{L} = \text{Ker}(f - \text{Id}) \subsetneq \text{Ker}(f - \text{Id})^2$$

ou bien: $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})^2$

supposons que: $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Ker}(f - \text{Id})^2$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = E_0(f) \oplus E_1(f)$$

$\Rightarrow f$ diag = abande.

4/ $v_3 \in \text{Ker}(f - \text{Id})^2 \setminus \text{Ker}(f - \text{Id})$

$$v_2 = (f - \text{Id})(v_3) \neq 0 \text{ car } v_3 \notin \text{Ker}(f - \text{Id})$$

$$mq = \{v_2, v_3\} \text{ base de } \text{Ker}(f - \text{Id})^2$$

$$\text{on a: } \dim(\text{Ker}(f - \text{Id})^2) = 2 \quad \left(\begin{array}{l} f \in \text{GL}_3 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{si } x \in \mathbb{R}^3 \\ \text{alors } x \neq 0 \end{array} \right)$$

mq: $\{v_2, v_3\}$ libre?

$$\text{soient } \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tq: } \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

(on appl $f - \text{Id}$)

$$\alpha_3 \underbrace{(f - \text{Id})(v_3)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 \underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

5/ $\text{Ker}(f) = \text{vect}\{v_1\}$, $v_1 = (1, -1, -1)$

6/ on a: $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})^2$

$$B_1 = \{v_1\} \text{ est une base de } \text{Ker } f$$

$$B_2 = \{v_2, v_3\} \text{ est une base de } \text{Ker}(f - \text{Id})^2$$

$$\Rightarrow B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

7/

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

$= T$

$$v_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id}) = E_1(f)$$

$$v_2 = (f - \text{Id})(v_3)$$

$$v_2 = f(v_3) - v_3$$

$$\Rightarrow f(v_3) = v_2 + v_3$$

D'aut: $A = \underset{P}{\underset{B \rightarrow B}{P_{B \rightarrow B}}}^T \underset{P}{P_{B \rightarrow B_C}}$, B_C = base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$7/ T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$

on vérifie = $D'N' = N'D'$

$$A = P T P^{-1}$$

$$= P (D' + N') P^{-1}$$

$$= \underbrace{P D' P^{-1}}_D + \underbrace{P N' P^{-1}}_N$$

D semblable à une matrice diagonale
alors = D est diag

N semblable à une matrice nilpotente
alors = N nilpotente

$$\begin{aligned} \text{et } DN &= P D' P^{-1} P N' P^{-1} \\ &= P D' N' P^{-1} \\ &= P N' D' P^{-1} = ND. \end{aligned}$$

8/ $A = D + N$ et $DN = ND$

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

N nilpotente
et $\dim(E) = 3$
 $\Rightarrow N^3 = 0$

$$= \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2}$$

$$= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} P^{-1} + n N D$$

$$= D + n N D$$

Ex 22 :

$$\gamma_u : d(E) \longrightarrow d(E), \quad u \in d(E)$$

$$f \mapsto u \circ f$$

$$\alpha \in K, f, g \in d(E)$$

$$1/ \gamma_u(\alpha f + g) = u \circ (\alpha f + g) \text{ or } u \in d(E)$$

Δ :

$$(f+g) \circ u \text{ vrai} = \alpha u \circ f + u \circ g$$

$$= f \circ u + g \circ u = \alpha \gamma_u(f) + \gamma_u(g)$$

$$u \circ (f+g) \text{ssi } u \in d(E)$$

$$= u \circ f + u \circ g$$

$$\Rightarrow \gamma_u \in d(d(E)).$$

$$2/ \text{ soit } \alpha \in \text{Sp}(\gamma_u)$$

$$\Leftrightarrow \exists f \in d(E) \text{ tq : } \gamma_u(f) = \alpha f.$$

$$f \neq 0$$

$$\Leftrightarrow u \circ f = \alpha f$$

$$\Rightarrow f \neq 0, \exists x \in E \text{ tq } f(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow u(f(x)) = \alpha f(x)$$

$$\Rightarrow \alpha \in \text{Sp}(u)$$

$$\Leftarrow \text{ soit } \alpha \in \text{Sp}(u) \Rightarrow \exists x \neq 0 \text{ tq : } u(x) = \alpha x$$

$$\text{on pose : } p_x \text{ la projection sur vect}(x)$$

$$\parallel \text{ a' un suppl\'ementaire } G \text{ de vect}(x)$$

$$E = G \oplus \text{vect}(x), p_x \neq 0 \text{ car vect}(x) \neq \{0\}$$

$$\text{mq : } u \circ p_x = \alpha p_x$$

$$\text{ soit } y \in E, u \circ p_x(y) = u(p_x x)$$

$$y = y_G + p_x x$$

$$= p_x u(x)$$

$$= p_x \alpha x$$

$$= \alpha (p_x x) = \alpha p_x(y)$$

$$\Rightarrow u \circ p_x = \alpha p_x$$

$$\text{ D'ou : } \gamma_u(p_x) = \alpha p_x, p_x \neq 0.$$

$$\Rightarrow \alpha \in \text{Sp}(\gamma_u).$$

$$* E_\lambda(\gamma_u) = \{ f \in d(E) / \text{Im}(f) \subset E_\lambda(u) \}$$

$$f \in E_\lambda(\gamma_u) \Leftrightarrow \gamma_u(f) = \lambda f$$

$$\hookrightarrow u \circ f = \lambda f$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E, u(f(x)) = \lambda(f(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \in E_\lambda(u)$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset E_\lambda(u).$$

$$3/ \text{ soit : } B = (e_1, \dots, e_n) \begin{cases} \dim(F) = \dim(G) \\ \forall \exists B \text{ de } F \text{ et } G \\ 2/ \exists \text{ bijection de } F \text{ vers } G \\ 3/ \text{ construire la bijection} \end{cases}$$

$$\Psi : E_\lambda(\gamma_u) \longrightarrow E_\lambda(u) \times \dots \times E_\lambda(u)$$

$$f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$* / \Psi \text{ lin\'eaire}$$

$$* / \Psi(f) = 0 \Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n)) = (0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow f = 0 : \Psi \text{ injective}$$

$$* / \text{ soit } (x_1, \dots, x_n) \in E_\lambda(u) \times \dots \times E_\lambda(u)$$

$$\exists f \in d(E) \text{ tq : } \begin{cases} f(e_1) = x_1 \\ f(e_2) = x_2 \\ \vdots \\ f(e_n) = x_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(B) \subset E_\lambda(u)$$

$$\Rightarrow f(E) \subset E_\lambda(u)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) \subset E_\lambda(u)$$

$$\Rightarrow f \in E_\lambda(\gamma_u)$$

$$\Rightarrow \Psi(f) = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\underline{\mathcal{L}} = \Psi \text{ surjective}$$

$$\text{ D'ou : } \Psi \text{ isomorphisme et :}$$

$$\dim(E_\lambda(\gamma_u)) = n \times \dim(E_\lambda(u))$$

$$\text{ ou bien : } E_\lambda(\gamma_u) = d(E, E_\lambda(u))$$

$$f \in E_\lambda(\gamma_u) \Leftrightarrow f \in d(E), f(E) \subset E_\lambda(u)$$

$$\Leftrightarrow f \in d(E, E_\lambda(u))$$

$$\Leftrightarrow \dim(E_\lambda(\gamma_u)) = \dim(E) \times \dim E_\lambda(u)$$

$$= n \times \dim(E_\lambda(u)).$$

$$4/ \gamma_u \text{ est diag sur : } \dim(d(E)) = \sum_{\lambda \in K} \dim(E_\lambda(\gamma_u))$$

$$\text{viii: } n^2 = \sum_{\lambda \in S(P)} \dim(E_\lambda(u)) \times n$$

$$\text{viii: } n = \sum_{\lambda \in S(P(u))} \dim(E_\lambda(u))$$

$\dim(E)$

viii: u est diag.

$$\text{5/ soit } P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$$

$$P = x$$

$$\gamma_{u^k}: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$f \mapsto u^k \circ f$$

$$\gamma_{P(u)}(f) = P(u) \circ f$$

$$\gamma_{u^2}(f) = \gamma_u \circ \gamma_u(f) = \gamma_u(u \circ f)$$

$$= u^2 \circ f$$

$\Rightarrow$ mq = (par récurrence)

$$\gamma_{u^k}(f) = u^k \circ f, \forall k$$

D'autre part,

$$P(\gamma_u)(f) = \left(\sum_{k=0}^d a_k \gamma_u^k \right)(f)$$

$$= \sum_{k=0}^d a_k \gamma_u^k(f)$$

$$= \sum_{k=0}^d a_k u^k \circ f$$

$$= \left(\sum_{k=0}^d a_k u^k \right) \circ f$$

$$= P(u) \circ f = \gamma_{P(u)}(f)$$

$$\underline{\text{Cl}} = \boxed{P(\gamma_u) = \gamma_{P(u)}}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, AB = BA$$

$$1) \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$$

$$= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ 0 & xI_n - A \end{vmatrix} = (\chi_A(x))^2$$

$$\Rightarrow Sp(A) = Sp(M) \quad (\text{par les } \hat{m} \text{ multiplicités})$$

$$2) a) M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2AB \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^2B \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad (\text{récurrence})$$

$$P(M) = \sum_{k=0}^n a_k M^k$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(A) & \sum_{k=0}^n k a_k A^{k-1} B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(A) & P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

b) "si" si $B=0$ et A diag
alors A admet un poly annulateur
scindé à racines simples
 $\Rightarrow M$ diag

$$\text{au lieu: } M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\exists P \in Gl_n(\mathbb{R}) \text{ tq } A = PDP^{-1}$$

D : diagonale

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0 \\ 0 & PDP^{-1} \end{pmatrix}$$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}_Q \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{D': \text{diagonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}}_{Q^{-1}}$$

" $\Rightarrow$ " supposons que M diag

$$\text{alors: } \exists P \text{ s.r.s tq } P(M) = 0$$

$$0 = P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} = 0$$

alors $P(A) = 0 \Rightarrow A$ est diag
(car P s.r.s)

et $P'(A)B = 0$ mq: $B=0$?

$$\text{ma: } \underbrace{Sp(A)}_{\neq \emptyset} \subset \{\text{racines de } P\}$$

$$\Rightarrow Sp(A) \cap \{\text{racines } P'\} = \emptyset$$

car: P s.r.s donc P et P' n'ont
aucune vp commune.

on écrit P' dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P'(x) = \alpha \prod_{i=1}^m (x - \beta_i), \forall i, \beta_i \notin Sp(A)$$

$$P'(A) = \alpha \prod_{i=1}^m (A - \beta_i I_n)$$

$$\text{or } A - \beta_i I_n \in Gl_n(\mathbb{K}) \text{ car } \beta_i \notin Sp(A)$$

$$\Rightarrow P'(A) \in Gl_n(\mathbb{K})$$

$$\text{or } P'(A)B = 0 \Rightarrow \underline{B=0}$$

Ex 14 =

1/ soit f l'endo. canon. associée à J

$$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ \vdots \\ f(e_{n-1}) = e_n \\ f(e_n) = e_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f^2(e_1) = e_3 \\ f^2(e_2) = e_4 \\ \vdots \\ f^2(e_{n-2}) = e_n \\ f^2(e_{n-1}) = e_1 \\ f^2(e_n) = e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^p(e_1) = e_{p+1} \\ \vdots \\ f^p(e_{n-p}) = e_n \\ f^p(e_{n-p+1}) = e_1 \\ \vdots \\ f^p(e_n) = e_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^p(e_k) = e_{k+p}, \forall 1 \leq k \leq n-p \\ f^p(e_k) = e_{k-(n-p)}, \forall p+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

$\forall p \in [1, n-1]$

$$J^p = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_{n-p}) & f(e_{n-p+1}) & \dots & f(e_n) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

$p = n-1 = f^{n-1}(e_1) = e_{1+n-1} = e_n$
pour $k = 2$

$2 \leq k \leq n = n-p = 1$

$$\begin{cases} f^{n-1}(e_1) = e_{n+1} = e_1 \\ \vdots \\ f^{n-1}(e_n) = e_{n+1} \end{cases}$$

$p = 2 = \begin{cases} f^n(e_1) = f(e_n) = e_1 \\ \vdots \\ f^n(e_n) = f(e_{n-1}) = e_n \end{cases}$

$Q = f^n = id_E \rightarrow J^n = I_n$

2/ $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = P(J)$

3/ $J^n = I_n$ alors $x^n - 1$ annulateur de J
 $\Rightarrow J$ diag et $S_p(J) \subset \{ \text{racines } x^n - 1 \}$

$$\chi_J = \det(x I_n - J) = \begin{vmatrix} x & & & -1 \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix}$$

dévelop. 1ère ligne

$$= x \begin{vmatrix} x & & & \\ -1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix}_{[n-1]} = x^n + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$= x^n - 1$

$\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$\chi_J = x^n - 1 \Rightarrow S_p(J) = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$
 $= \left\{ \omega^k, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$

$J = Q D Q^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \omega^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

$Jx = x \omega^k, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n = \omega^k x_1 \\ x_1 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega^k x_n \end{cases}$

$\Rightarrow x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \frac{1}{\omega^{(n-2)k}} \\ \frac{1}{\omega^{(n-1)k}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \frac{1}{\omega^{n-1}} \\ 1 & \omega & \dots & \frac{1}{\omega^{n-1} \omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \frac{1}{\omega^{n-1} \omega^{n-1}} \end{pmatrix}$

$$B/ A = P(J)$$

$$= P(Q D Q^{-1})$$

$$= Q P(D) Q^{-1}$$

$$= Q \begin{pmatrix} P(1) & & & 0 \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$\Rightarrow A$ diag