

TD : Espace préhilbertien-espace euclidien

Exercice 1

1. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien et x, y deux vecteurs non nuls de E . Montrer : $\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| =$

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}.$$

2. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que : $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2 \forall x \in E$. Montrer que c'est une base orthonormale de E .

Exercice 2 Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et f un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité cad : $\forall x, y \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$.

1. Montrer : $\|x\| = \|y\| \Rightarrow (x+y|x-y) = 0$.
2. Montrer : $\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|f(x)\| = \|f(y)\|$.
3. Montrer : $\exists k \geq 0$, tel que : $\|f(x)\| = k\|x\| \forall x \in E$.

Exercice 3 Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. Montrer que l'orthogonal d'un sev est un sev fermé.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On définit alors une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\varphi(P, Q) = \underbrace{\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt}_{\text{existence} \equiv \text{ques 1.}}$

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

4. Calculer : $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - (at+b))^2 dt \right\}$.

5. Calculer : $\inf \left\{ \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

6. Calculer : $\inf \{ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2, x, y, z \in \mathbb{R}, x+y+z=0 \}$.

Exercice 5 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par le produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on

$$\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{{}^tAA}$$

2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

3. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Soit H le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices de trace nulle. Calculer la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

6. Soit $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer : $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 6 Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ le sev de E formé par les polynômes de degrés $\leq n$.

1. Montrer que pour tout $h \in E$, la fonction $x \mapsto \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$.

On définit alors une application φ sur $E \times E$ par : $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2. Montrer que c'est un produit scalaire qu'on notera, dans la suite, par $(\cdot | \cdot)$.

3. Montrer : $(f | g) = \int_0^\pi f(\cos \theta)g(\cos \theta) d\theta, \quad \forall f, g \in E$.

4. Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe un polynôme T_n tel que

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Vérifier que $T_n(X) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$ où $E(\frac{n}{2})$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Donner T_0, T_1 et T_2 .

5. Montrer que la famille $(T_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale et calculer $\|T_n\|$ pour tout n .

6. Déterminer le degré et la parité de T_n pour tout n .

Montrer que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base (orthogonale) de $\mathcal{P}_n$.

7. Soit $(R_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux tels que $\deg R_n = n \quad \forall n \geq 0$. Montrer :

$$\forall n \geq 0, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}; R_n = \alpha_n T_n$$

8. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$(a) \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta$$

$$(b) T_{n+1} + T_{n-1} = 2X T_n$$

(c) le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

9. En dérivant deux fois les membres de l'égalité (1), montrer :

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$$

10. Montrer que les racines de T_n sont $Z(T_n) = \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right), 0 \leq k \leq n-1 \right\}$.

11. Montrer que la série $\sum T_n(x)t^n$ converge pour $|x| \leq 1$ et $|t| < 1$ et déterminer sa somme.

b/mg la famille $(T_n)_{n \geq 0}$ est totale ? ou bien $\left(\frac{T_n}{\|T_n\|} \right)_n$ est orthonormé totale ?

12. Soit $f \in E$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(f | T_n)^2}{\|T_n\|^2}$.

13. Montrer que la suite $(d(f, \mathcal{P}_n))_n$ est décroissante.

14. Montrer que la suite $(d(f, \mathcal{P}_n))_n$ converge vers 0.

15. Dédurre : $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f | T_n)^2}{\|T_n\|^2}$.

Exercice 7 Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $f \in L(E)$ tel que $(f(x) | y) = -(x | f(y)) \quad \forall x, y \in E$.

1. Montrer que cette condition est équivalente à : $(f(x) | x) = 0 \quad \forall x \in E$.

2. Montrer que : $\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

3. Montrer que : $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0\}$.

4. Montrer que : $\operatorname{tr}(f) = 0$.

5. Montrer que si n est impaire alors : $\det f = 0$.

6. Montrer que le polynôme caractéristique de f a même parité que n .

7. Montrer que si H est un sev stable par f alors $H^\perp$ est stable par f .

Exercice 8

- Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
 - Montrer : $\|AX\| = \|X\| \forall X \in \mathbb{R}^n$ ($\|\cdot\|$ est la norme associée au p.s. usuel sur $\mathbb{R}^n$).
 - Montrer : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$.
 - Montrer : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = n$.
 - Montrer : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.
- Vérifier que chaque matrice est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme $f \in L(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Décomposition OT)

- Soit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ trois bases d'un espace vectoriel. Etablir : $\text{Pass}(\beta_1, \beta_2) \cdot \text{Pass}(\beta_2, \beta_3) = \text{Pass}(\beta_1, \beta_3)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et triangulaire supérieure. Démontrer : $A = \text{Diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ avec $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$.
- Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Les vecteurs colonnes de P forment une base $\beta = (V_i)_i$ de $\mathbb{R}^n$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à β , on obtient une b.o.n. $\beta' = (W_i)_i$.
 - Vérifier que $\text{Pass}(\beta, \beta')$ est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.
 - Montrer alors l'existence d'une matrice orthogonale O et d'une matrice triangulaire supérieure à diagonale strictement positive T telles que : $P = OT$.
 - Montrer que cette décomposition est unique.

Exercice 10

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PD^tP$.
- Vérifier que $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $A^5 = 0 \Rightarrow A = 0$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ (avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les v.p. de A).
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : ${}^tAA$ est diagonalisable et $\text{Sp}({}^tAA) \subset \mathbb{R}_+$.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B .
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le rayon spectral de A est défini par : $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$. On note par $\|\cdot\|$ la norme issue du produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Montrer :

$$\sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \rho(A).$$

Exercice 11 (Théorème de Courant-Fisher)

Soit : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ formée par des vecteurs propres de A associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour $1 \leq k \leq n$ on note par V_k le sev engendré par $(e_1, \dots, e_k)$, par W_k celui engendré par $(e_k, \dots, e_n)$ et par $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k . On définit aussi $R_A(X) = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- Exprimer $R_A(X)$ en fonction des coordonnées de X dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

2. Montrer : $\min_{X \neq 0} R_A(X) = \lambda_1$, $\max_{X \neq 0} R_A(X) = \lambda_n$.
3. Montrer : $\max_{X \in V_k \setminus \{0\}} R_A(X) = \lambda_k$.
4. Soit $V \in \mathcal{F}_k$.
 - (a) Montrer : $V \cap W_k \neq \{0\}$.
 - (b) Dédire : $\max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) \geq \lambda_k$.
5. Dédire : $\min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) = \lambda_k$.

Exercice 12 (Réduction simultanée)

On définit les ensembles

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) / {}^tXAX \geq 0 \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$$

et

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) / {}^tXAX > 0 \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$$

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer : $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

2. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer : $\det A \leq \left(\frac{\text{tr}(A)}{n}\right)^n$. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.
3. (a) Montrer l'existence d'une matrice Q inversible telle que ${}^tQ.Q = A$.
 (b) Vérifier : ${}^tQ^{-1}.B.Q^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$.
 (c) Trouver alors D diagonale et P inversible telles que ${}^tP.D.P = B$ et ${}^tP.P = A$.
 (d) Dédire que si $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors :

$$\det(A+B) \geq \det A + \det B.$$

Exercice 13 (Déterminant de Gram)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Pour des vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de E , on définit la matrice de Gram et le déterminant de Gram par : $Gr(v_1, \dots, v_p) = ((v_i|v_j))_{i,j} \in S_p(\mathbb{R})$ et $G(v_1, \dots, v_p) = \det Gr(v_1, \dots, v_p)$.

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Montrer : ${}^tX Gr(v_1, \dots, v_p)X = \left\| \sum_{i=1}^p x_i v_i \right\|^2$.

2. Montrer alors : $Gr(v_1, \dots, v_p) \in S_p^+(\mathbb{R})$ et que

$$Gr(v_1, \dots, v_p) \in S_p^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre .}$$

3. Soit $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}dt$ et déduire : $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. Soit $x \in E$ et $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ un sev de E de dimension finie. Établir :

$$G(v_1, \dots, v_p, x) = G(v_1, \dots, v_p).d(x, F)^2$$

Exercice 14

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 4 :

1/ $t \mapsto P(t) e^{-t}$ continue sur $[0, +\infty[$
 $t^2 P(t) e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$: int sur $[1, +\infty[$
 $\Rightarrow t \mapsto P(t) e^{-t}$ int sur $[0, +\infty[$.

2/ $P_1, P_2, \varphi \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} * \varphi(\alpha P_1 + P_2, \varphi) &= \int_0^{+\infty} (\alpha P_1 + P_2) \varphi e^{-t} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} P_1 \varphi e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} P_2 \varphi e^{-t} dt \\ &= \alpha \varphi(P_1, \varphi) + \varphi(P_2, \varphi) \end{aligned}$$

$$* \varphi(P, \varphi) = \varphi(\varphi | P)$$

$$* \varphi(P, P) = \int_0^{+\infty} \underbrace{P^2(t)}_{\geq 0} e^{-t} dt \geq 0$$

$$* \varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t) e^{-t} dt = 0$$

or $t \mapsto P^2(t) e^{-t}$ continue ≥ 0 sur $[0, +\infty[\Rightarrow P^2(t) e^{-t} = 0$

$$\Rightarrow P(t) = 0, \forall t \in [0, +\infty[.$$

P admet infinité des racines $\Rightarrow \underline{P=0}$.

$$3) \varphi(x^p, x^q) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{p+q} e^{-t}}_{I_{p+q}} dt$$

on mg par récurrence : $I_n = n! I_0$ $\underline{I_0=1}$

$$\varphi(x^p, x^q) = (p+q)!$$

$$4) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - (at+b))^2 dt \right\}$$

$$= \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left\{ \|t^2 - (at+b)\|^2 \right\}$$

$$= \inf_{\varphi \in \mathbb{R}_1[x]} \|P - \varphi\|^2 \quad \text{avec } P(x) = x^2$$

projeté de P sur $\mathbb{R}_1[x]$.

* cherchons une b.o.n de $\mathbb{R}_1[x]$?

$$P_1 = \frac{1}{\|1\|}$$

$$P_2 = \frac{x - \langle x, 1 \rangle 1}{\|x - \langle x, 1 \rangle 1\|} = \frac{x-1}{\|x-1\|}$$

$$\begin{aligned} \sigma = \|x-1\|^2 &= \varphi(x-1, x-1) \\ &= \varphi(x, x) - \varphi(x, 1) - \varphi(1, x) + \varphi(1, 1) \\ &= 2 - 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$P_2 = x-1$$

$B = (1, x-1)$. B.O.N de $\mathbb{R}_1[x]$

P = proj orth sur $\mathbb{R}_1[x]$

$$\begin{aligned} P(x^2) &= \langle x^2, P_1 \rangle P_1 + \langle x^2, P_2 \rangle P_2 \\ &= \varphi(x^2, 1) 1 + \varphi(x^2, x-1)(x-1) \\ &= 2 + (3! - 2)(x-1) \\ &= 2 + 4(x-1) = 4x-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x^2, \mathbb{R}_1[x])^2 &= \|x^2 - P(x)\|^2 \\ &= \|x^2 - 4x + 2\|^2 \end{aligned}$$

$$= \varphi(x^2 - 4x + 2, x^2 - 4x + 2) = 24$$

$$5) \inf \left\{ \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

on pose : $E = \mathbb{R}_3[x]$ muni de p.s =

$$\langle P, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 P \varphi dt$$

$$\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \|x^3 - (ax^2 + bx + c)\|^2$$

$$= \inf_{\varphi \in \mathbb{R}_2[x]} \|x^3 - \varphi\|^2 = d(x^3, \mathbb{R}_2[x])^2$$

$$\text{en effet, } \langle x^m, x^n \rangle = \int_{-1}^1 t^{m+n} dt$$

$$= \left[\frac{1}{m+n+1} t^{m+n+1} \right]_{-1}^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } m+n \text{ impair} \\ 2 & \text{si } m+n \text{ pair} \end{cases}$$

(1)

$$\mathbb{R}_2[x] = \text{vect}(1, x, x^2)$$

$$P_1 = \frac{1}{\|1\|} \quad , \quad \langle 1, 1 \rangle = \langle x^0, x^0 \rangle = 1$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_2 = \frac{x - \langle x, P_1 \rangle P_1}{\|x - \langle x, P_1 \rangle P_1\|}$$

$$\langle x, P_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x, 1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{x}{\|x\|} \quad , \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{2}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x$$

$$P_3 = \frac{x^2 - \langle x^2, P_1 \rangle P_1 - \langle x^2, P_2 \rangle P_2}{\|x^2 - \langle x^2, P_1 \rangle P_1 - \langle x^2, P_2 \rangle P_2\|}$$

$$d(x^3, \mathbb{R}_2[x])^2 = \|x^3 - \langle x^3, P_1 \rangle P_1 - \langle x^3, P_2 \rangle P_2 - \langle x^3, P_3 \rangle P_3\|^2$$

$$6) E = \mathbb{R}^3, \text{ muni de p.s } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

$$d(a, F)^2, \quad a = (1, -1, 2)$$

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+y+z=0 \}$$

$$d(a, F) = \|a - P_F(a)\| = \|P_{F^\perp}(a)\|$$

$$F^\perp \text{ de dim } 1.$$

$$\forall (x, y, z) \in F, \langle (x, y, z), (1, 1, 1) \rangle = x+y+z = 0$$

$$(1, 1, 1) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow F^\perp = \text{vect}\{(1, 1, 1)\}$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ base orthonormée de } F^\perp$$

$$P_{F^\perp}(a) = \langle a, \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{2}{3}(1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow d(a, F)^2 = \left\| \frac{2}{3}(1, 1, 1) \right\|^2 = \frac{4}{3}$$

Ex 5 :

$$1/ |\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\| = \sqrt{\text{tr}(t_{AA})} \sqrt{\text{tr}(t_{BB})}$$

$$\text{pour } B = I_n :$$

$$|\langle A, I_n \rangle| \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(t_{AA})}$$

$$\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(t_{AA})} \quad \Delta: x \in F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$$

$$2/ \text{ avec } A \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow t_A = A \quad x \in F \cap G \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$B \in A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow t_B = -B$$

$$\begin{cases} \langle A, B \rangle = \text{tr}(t_{AB}) = \text{tr}(AB) \\ \langle B, A \rangle = \text{tr}(t_{BA}) = -\text{tr}(AB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle A, B \rangle = 0 \Rightarrow S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow S_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp A_n(\mathbb{R})$$

$$\text{avec } A \in M_n(\mathbb{R}),$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + t_A)}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - t_A)}_{\in A_n(\mathbb{R})}$$

$$\Rightarrow M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp A_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Rq : on a } S_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A_n(\mathbb{R}) \subset (S_n(\mathbb{R}))^\perp$$

$$\text{or } M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp S_n(\mathbb{R})$$

$$\text{et } M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus (S_n(\mathbb{R}))^\perp$$

$$\Rightarrow \dim(A_n(\mathbb{R})) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) = \dim(S_n(\mathbb{R}))^\perp$$

$$(1, 2):$$

$$\Rightarrow A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^\perp \text{ et } S_n(\mathbb{R}) = (A_n(\mathbb{R}))^\perp$$

$$3/ P_{S_n}(A) = \frac{1}{2}(A + t_A)$$

$$4/ M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d(M, S_n(\mathbb{R})) = \|M - P_{S_n}(M)\| = \|P_{S_n^\perp}(M)\|$$

$$= \|P_{A_n}(M)\| = \left\| \frac{1}{2}(M - t_M) \right\|$$

$$M - t_M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } A = \frac{1}{2}(M - t_M)$$

$$\sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \dots$$

$$5/ H = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq: } \text{tr}(M) = 0 \}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$d(J, H) = ?$$

$$A \in H, \langle I_n, A \rangle = \text{tr}(t_{I_n} A) = \text{tr}(A) = 0 \quad (\text{car } A \in H)$$

$H = \ker(\text{tr})$: le noyau d'une forme linéaire non nulle

Donc : H hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$

$$I_n \in H^\perp \text{ et } \dim(H^\perp) = 1$$

$$\Rightarrow H^\perp = \text{vect}(I_n)$$

$$\mathcal{L} = M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \text{vect}(I_n)$$

$$\left\{ \frac{1}{\|I_n\|} I_n \right\} \text{ est b.o.n de } H^\perp$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \right\}$$

$$d(J, H) = \|P_{H^\perp}(J)\| = \left\| \left\langle J, \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \right\rangle \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \right\|$$

$$= \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=1}^n \text{tr}(J) I_n \right\| = \|I_n\| = \sqrt{n}.$$

$$6/ \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \|M - aI_n - bJ\|$$

$$d(M, F) \text{ avec : } F = \text{vect}(I_n, J)$$

on orthonormalise (I_n, J) :

$$A = \frac{I_n}{\sqrt{n}}, \quad B = \frac{J - \langle J, \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \rangle \frac{1}{\sqrt{n}} I_n}{\left\| J - \langle J, \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \rangle \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \right\|}$$

$$B = \frac{J - I_n}{\|J - I_n\|}$$

$$d(M, F) = \|M - P_F(M)\|$$

$$= \|M - \langle M, A \rangle A - \langle M, B \rangle B\|$$

$$- \text{Ex 6 : } E = C([-1, 1], \mathbb{R})$$

$$1/ x \mapsto \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est continue sur }]-1, 1[.$$

$$\frac{|h(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{1}{1-x} \cdot \frac{|h(1)|}{\sqrt{2}} \text{ int sur } [\frac{1}{2}, 1[$$

$$\frac{|h(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{1}{(1)^+ \sqrt{1+x}} \frac{|h(-1)|}{\sqrt{2}} \text{ int sur }]-1, \frac{1}{2}]$$

$$\mathcal{L} = \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ int sur }]-1, 1[.$$

$$2/ x \mapsto f, g \in E,$$

$$\mathcal{L}(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ est produit scalaire sur } E$$

$$3/ (f/g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{c.v on pose : } x = \cos \theta$$

$$dx = -\sin \theta d\theta$$

$$(f/g) = \int_{\pi}^0 \frac{f(\cos \theta)g(\cos \theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} f(\cos \theta)g(\cos \theta) d\theta \quad \sin \theta \geq 0 \text{ sur }]0, \pi[$$

$$4/ \cos(n\theta) = \text{Re}(e^{in\theta}) = \text{Re}(\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$= \text{Re} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} (\sin \theta)^k (i)^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (-1)^k (\sin \theta)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (\cos^2 \theta - 1)^k$$

$$= T_n(\cos \theta) \text{ avec } T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k$$

$$* T_0 = \sum_{k=0}^0 C_0^{2k} X^{0-2k} (X^2-1)^0 = 1$$

$$T_1 = \sum_{k=0}^1 C_1^{2k} X^{1-2k} (X^2-1)^k = X$$

$$T_2 = \sum_{k=0}^2 C_2^{2k} X^{2-2k} (X^2-1)^k = X^2 + (X^2-1) = 2X^2 - 1$$

soit $m \neq n$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (T_n | T_m) &= \int_0^\pi T_n(\cos \theta) \cdot T_m(\cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{n+m} \sin((n+m)\theta) \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n-m} \sin((n-m)\theta) \right]_0^\pi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

donc $(T_n | T_m) = 0$, $\forall m \neq n$.

donc $(T_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale.

* $\|T_n\|^2 = (T_n | T_n) = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta$

soit $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4n} \sin(2n\theta) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

soit $n=0$: $\|T_0\| = \sqrt{\int_0^\pi 1 d\theta} = \sqrt{\pi}$

soit $T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} X^{n-2k} (X^2-1)^k$

soit $P_k(x) = C_n^{2k} X^{n-2k} (X^2-1)^k$

$\deg(P_k) = n$, $\forall k$ et P_k de coeff

dominant positifs

donc: $\deg\left(\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} P_k\right) = n$

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (-x)^{n-2k} ((-x)^2-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (-1)^n X^{n-2k} (X^2-1)^k = (-1)^n T_n(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_n$ est de m parité de n.

* $P_n = \mathbb{R}_n[X]$

$\text{card}(T_0, \dots, T_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$

et $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls (car: $\|T_n\| \neq 0 \forall n$) $\Rightarrow (T_0, \dots, T_n)$ libre ou bien $= (T_0, \dots, T_n)$ famille de polynômes de degré échelonnée $\Rightarrow$ libre $\mathcal{B} = (T_0, \dots, T_n)$ base de P_n .

* $\deg(P_n) = n$

$R_n \in P_n = \mathbb{R}_n[X]$

$P_n = \text{vect} \left(\underbrace{\frac{T_0}{\|T_0\|}, \dots, \frac{T_n}{\|T_n\|}}_{\text{b.o.n.}} \right)$

$R_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k = \sum_{k=0}^n \left\langle R_n, \frac{T_k}{\|T_k\|} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|}$

$(R_0, \dots, R_{n-1}) = \mathcal{B}$ de degré échelonnée

$\Rightarrow \mathcal{B}$ libre + $\text{card}(\mathcal{B}) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

$\Rightarrow R_n \perp R_i, \forall i \in [0, n-1]$

$\Rightarrow R_n \perp \text{vect}(R_0, \dots, R_{n-1})$

$\Rightarrow R_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$

alors $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{vect}(T_0, \dots, T_{n-1})$

$= \langle R_n, T_k \rangle = 0 \forall k \in [0, n-1]$

$\Rightarrow \underline{R_n(x) = \alpha_n T_n(x)}.$

Ex 8 :

1/ $A \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle_{\mathbb{R}^n} = t_{(Ax)} Ax$$

$$= t_x t_{AAX}$$

$$= t_{xx} = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

2/ soit α vp de A , $\alpha \in S_{\mathbb{P}\mathbb{R}}(A)$.

soit $x \vec{v}_p$ associé à α . ($x \in E \setminus \{0\}$)

$$\|Ax\| = \|x\|$$

$$\|\alpha x\| = \|x\| \Rightarrow |\alpha| \|x\| = \|x\|$$

$$\Rightarrow |\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1.$$

$$\text{donc : } S_{\mathbb{P}\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}.$$

3/ $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une b.o.n

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \Rightarrow \|c_{ij}\|^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = n$$

$$\text{4/ on pose : } J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = (a_{ij})_{i,j}$$

$$| \langle A', J \rangle | \leq \|A'\| \|J\|$$

$$\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j} 1}$$

$$\sqrt{nn}.$$

Ex 9 :

B_1, B_2, B_3 3 bases.

$$B_1 = (e_1, \dots, e_n)$$

$$B_2 = (e'_1, \dots, e'_n)$$

$$P_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = M_{B_2 B_1}(\text{Id})$$

$$P_{B_1 B_2} P_{B_2 B_3} = M_{B_2 B_1}(\text{Id}) \cdot M_{B_3 B_2}(\text{Id})$$

$$\text{Id : } E \xrightarrow{B_1} E \xrightarrow{B_2} E \xrightarrow{B_3} E = M_{B_3 B_1}(\text{Id}) = P_{B_1 B_3}$$

$$P_{B_1 B_3} = M_{B_3 B_1}(\text{Id})$$

5/ $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale et triangulaire sup.

$$mq : A = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Braillon :

$$\text{soit : } A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \alpha_1 & p_1 & & \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (c_1, \dots, c_n) \text{ b.o.n de } \mathbb{R}^n$$

$$\alpha_1^2 = 1 \text{ car } \|\alpha_1\| = 1 \quad (\|c_1\| = 1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \pm 1$$

et on a :

$$\|c_2\|^2 = 1 \Rightarrow \alpha_2^2 + p_1^2 = 1$$

$$\langle c_2, c_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 p_1 + \alpha_2 0 + 0 \dots + 0 = 0$$

$$\alpha_1 p_1 = 0 \text{ or } \alpha_1 \neq 0 \quad (\alpha_1 = \pm 1) \Rightarrow p_1 = 0.$$

mq : par récurrence sur $j \in [1, n]$

$$\text{que } c_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$\text{pour } j=1, c_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } A \text{ triangulaire sup et } \|c_1\|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha_1^2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \pm 1$$

(5)

supposons le résultat jusqu'à j et mq pour $j+1$.

$$\text{H.R: } A = \begin{pmatrix} \pm 1 & & c_j & c_{j+1} \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 & \\ & & & & \alpha_{j+1} & \\ & & & & 0 & \ddots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$c_{j+1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \alpha_{j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall i \in [1, j], c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \pm 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle c_{j+1}, c_i \rangle = 0$$

$$\pm \beta_i = 0 \Rightarrow \|c_{j+1}\|^2 = 1 \Rightarrow \alpha_{j+1}^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha_{j+1} = \pm 1$$

d'où le résultat.

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), P = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{matrix} B = \\ \vdots \\ (v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

base canonique

$$B' = (w_1, \dots, w_n) \text{ b.o.n}$$

$$\text{avec } w_i = \frac{v_i - \sum \langle v_i, w_k \rangle w_k}{\| \cdot \|}$$

$$\text{mq } P_{BB'} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ x & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & x \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

$$\text{mq: } \forall i, w_i = \text{vect}(v_1, \dots, v_i) \text{ par récurrence sur } i \quad w_i = \sum_{k=1}^i \alpha_k v_k \quad \alpha_i > 0$$

$$\text{pour } i=1, w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$$

$$w_1 \in \text{vect}(v_1) \text{ et } \alpha_1 = \frac{1}{\|v_1\|} > 0$$

supposons le résultat jusqu'à i :

$$w_{i+1} = \frac{1}{\| \cdot \|} \left[v_{i+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^i \beta_k w_k}_{\in \text{vect}(v_1, \dots, v_i)} \right]$$

$$= \frac{1}{\| \cdot \|} (v_{i+1} - x)$$

$$x \in \text{vect}(v_1, \dots, v_i)$$

$$\text{ainsi, } w_{i+1} \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{i+1})$$

$$w_{i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k v_k$$

$$\text{avec: } \alpha_{i+1} = \frac{1}{\| \cdot \|} > 0$$

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \\ \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

$$\alpha_i > 0 \quad \forall i \in [1, n]$$

$$b) P \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{matrix} B = \\ \vdots \\ (v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

forment une base.

$$P = P_{B'B}$$

$$\text{soit: } B' = (w_1, \dots, w_n) \text{ b.o.n}$$

$$P = P_{B'B} = P_{B'B'} \times P_{B'B}$$

$$P_{B'B} = (P_{B'B'})^{-1} \quad \text{Rappel:}$$

$$\text{si } T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

et comme $P_{B'B'}$ triangulaire sup à diagonale $> 0 \Rightarrow P_{B'B}$ est de $\hat{m}$.

$$B_c: \text{base canonique: b.o.n}$$

$$B' = (w_1, \dots, w_n) \text{ b.o.n}$$

on pose: $O = P_{B_0 B_1}$
 $T = P_{B_1 B_2}$

$\Rightarrow P = OT.$

✓ supposons que: $\exists T', O' \text{ tq } P = OT = O'T'$
 $O' \in O_n(\mathbb{R})$
 T' trian sup à diag > 0

$OT = O'T'$

O, O' orthogonales $\Rightarrow$ inversibles

T, T' trian à diag > 0 donc $\neq 0$.

$\Rightarrow$ inversibles.

$T'T^{-1} = (O')^{-1}O$
 trian sup à diag > 0 . $\in O_n(\mathbb{R})$

Δ : le produit de 2 matrices orthogonales, inverse (t) sont orthogonales.

Δ : le produit de 2 matrices trian sup à diag > 0 est de $\hat{m}$.

d'où $\Rightarrow T'T^{-1} = (O')^{-1}O = I_n$.

d'où cette décomposition est unique.

Ex 10:

✓ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ diag dans une b.o.n.

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2(x-3)$

$E_0(A) = ?$

$x \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow x = -y-z$

$\Rightarrow E_0(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$E_3(A) = ? \Leftrightarrow AX = 3X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3x \\ x+y+z=3y \\ x+y+z=3z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z \Rightarrow E_3(A) = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

on sait que: $E_0(A) \perp E_3(A)$

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

on orthonormalise B_1 et on orthonormalise $B_2 \Rightarrow B_1 \cup B_2$ est b.o.n de $\mathbb{R}^3$ formé des $\vec{v}$

on pose: $B'_1 = (v_1, v_2)$

$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, v_1 \rangle v_1}{\| \dots \|} =$

$\langle e_2, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle e_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 - \langle e_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B'_1 = (v_1, v_2)$

$B'_2 = v_3, v_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on pose: $B' = (v_1, v_2, v_3)$ b.o.n de $\mathbb{R}^3$ formé des $\vec{v}$ de A :

$P = \begin{pmatrix} -1/2 & \alpha \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1/2 & \alpha \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\alpha & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2i & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x-2i)x - 1 = x^2 - 2ix - 1 = (x-i)^2$$

$\Rightarrow Sp(A) = \{i\}$ or $A \neq iI_n$

$\Rightarrow A$ n'est pas diag. (contre exemple dans $M_2(\mathbb{C})$)

3) $A \in S_n(\mathbb{R})$, tq: $A^5 = 0$ mq: $A = 0$.

on a: $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors A est diag
on a aussi: $A^5 = 0$ alors A nilpotente
or la seule matrice nilpotente diag
est la matrice nulle $\Rightarrow \underline{A=0}$.

4) $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors A diag dans une b.o.n, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, D diagonale
tq: $A = PDtP$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ des vp de } A$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \text{tr}(t_{AA})$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ p.s canonique de $M_n(\mathbb{R})$

$$= \text{tr}(t_{(PDtP)PDtP})$$

$$= \text{tr}(PDtPpPDtP) \quad \text{In car } P \in O_n(\mathbb{R})$$

$$= \text{tr}(PD^2tP) = \text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

semblable à D

5) $B = A^3 + A + I_n$

$A \in S_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ diag: $A = PDtP$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, P \in O_n(\mathbb{R})$$

$$B = P(\underbrace{D^3 + D + I_n}_{D'})tP = PD'tP$$

$\Rightarrow B$ diag dans une b.o.n

$$D' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha'_n \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha'_i = \alpha_i^3 + \alpha_i + 1$$

mq A polynôme en $B \Leftrightarrow$ mq D poly en D' ?

(E) mq $\exists \varphi \in \mathbb{R}[x]$ tq: $D = \varphi(D')$

$$(E) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \alpha'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha'_n \end{pmatrix}$$

$$(E) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\alpha'_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\alpha'_n) \end{pmatrix}$$

(E) $\exists \varphi \in \mathbb{R}[x]$ tq: $\forall i, \varphi(\alpha'_i) = \alpha_i$

Rappel: $x_1, \dots, x_n$ a.a. $\neq$
 $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$

$\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tq: $P(x_i) = y_i$ Interpolation de Lagrange

$\Rightarrow$ D'après Lagrange: $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des vp de A a.a. $\neq$

7) $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\rho(A) = \{\max |\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$

mq: $\sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \rho(A)$

$\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de $\mathbb{R}^n$ formé des vp de A . soit $X \in \mathbb{R}^n$ tq: $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\|AX\| = \|A \sum_{i=1}^n x_i e_i\|$$

soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des vp associées à

$(e_1, \dots, e_n)$

$$\|Ax\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{Ae_i}_{\lambda_i e_i} \right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i^2$$

$$\forall i, \lambda_i^2 \leq \rho(A)^2, \forall i \in [1, n]$$

$$\|Ax\|^2 \leq \rho(A)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\|x\|^2}$$

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \leq \rho(A)^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \left| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right| \leq \rho(A)$$

$\Rightarrow \rho(A)$ est un majorant

mq: il est atteint?

$$\text{on a: } \rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

$$\text{soit } e \in \mathbb{R}^n, e \neq 0, t_q = Ae = \lambda e, |\lambda| = \rho(A)$$

$$\text{on a: } \frac{\|Ae\|}{\|e\|} = |\lambda| \frac{\|e\|}{\|e\|} = |\lambda| = \rho(A)$$

$$\rho = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \rho(A)$$

Ex 13:

$$G_p(v_1, \dots, v_p) = \begin{pmatrix} \langle v_i, v_j \rangle \end{pmatrix}_{i,j}$$

$$1) X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$t_x G_r x = \langle x, G_r x \rangle$$

$$G_r x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p \langle v_1, v_i \rangle x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \langle v_p, v_i \rangle x_i \end{pmatrix} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^p \langle v_j, v_i \rangle x_i$$

$$t_x y = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^p} = \sum_{j=1}^p y_j x_j$$

$$= \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p x_i \langle v_j, v_i \rangle x_j$$

$$\rho = \left\| \sum_{i=1}^p x_i v_i \right\|^2$$

$$2) \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

$$\Rightarrow G_r(v_1, \dots, v_p) \in S_p(\mathbb{R})$$

$$\text{or } t_x G_r x = \left\| \sum_{i=1}^p x_i v_i \right\|^2 \geq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^p$$

$$\text{alors: } G_r(v_1, \dots, v_p) \in S_p^+(\mathbb{R}).$$

* $(v_1, \dots, v_p)$ est libre

$$(\Rightarrow) \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \text{ alors } \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$$

$$(\Rightarrow) \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\},$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i \neq 0. (\Rightarrow) \left\| \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i \right\|^2 \neq 0$$

$$(\Rightarrow) \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}, t_x G_r x \neq 0.$$

$$\text{on pose: } x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \Rightarrow t_x G_r x > 0$$

$$\rho = \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre}$$

$$(\Rightarrow) G_r \in S_p^{++}(\mathbb{R})$$

(3)

$$3) H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$* \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} dt = \frac{1}{i+j-1}$$

$$= \langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle$$

$$H = Gr(\underbrace{x^0, \dots, x^{p-1}}_{\text{libre}}) \quad 1 \leq i, j \leq p$$

$$\Rightarrow H \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

$$4) F = \text{vect}(v_1, \dots, v_p), x \in E,$$

$$G(v_1, \dots, v_p, x) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_1 \rangle & \langle x, v_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle v_1, v_p \rangle & & \langle v_p, v_p \rangle & \langle x, v_p \rangle \\ \langle v_1, x \rangle & & \langle v_p, x \rangle & \langle x, x \rangle \end{vmatrix}$$

$$\text{on a: } E = F \oplus F^\perp$$

$$\forall x \in E, x = x_F + x_{F^\perp}$$

$$= \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i + x_{F^\perp}$$

$$\langle x, v_i \rangle = \langle x_F + x_{F^\perp}, v_i \rangle$$

$$= \langle x_F, v_i \rangle + \underbrace{\langle x_{F^\perp}, v_i \rangle}_{=0}$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^p \alpha_j v_j, v_i \right\rangle$$

$$G(v_1, \dots, v_p, x) =$$

$$\begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_1 \rangle & \langle \sum \alpha_j v_j, v_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle v_1, v_p \rangle & & \langle v_p, v_p \rangle & \langle \sum \alpha_j v_j, v_p \rangle \\ \langle v_1, x \rangle & & \langle v_p, x \rangle & \langle x, x \rangle \end{vmatrix}$$

$$c_{p+1} \leftarrow c_{p+1} - \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i$$

$$\langle \sum \alpha_j v_j, v_1 \rangle - \sum \alpha_i \langle v_i, v_1 \rangle =$$

$$\langle \sum \alpha_j v_j, v_1 \rangle - \langle \sum \alpha_i v_i, v_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow G(v_1, \dots, v_p, x) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, x \rangle & & d(x, F)^2 \end{vmatrix}$$

en effet =

dernière ligne =

$$\langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^p \alpha_i \langle v_i, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle \sum \alpha_i v_i, x \rangle$$

$$= \langle x - \sum \alpha_i v_i, x \rangle$$

$$= \langle x_{F^\perp}, x \rangle_{x_F + x_{F^\perp}}$$

$$= \langle x_{F^\perp}, x_{F^\perp} \rangle$$

$$= \|p_{F^\perp}(x)\|^2$$

$$= d(x, F)^2$$

Ex 12:

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}^n, t_x A x \geq 0\}$$

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t_x A x > 0\}$$

1/ Δ : $t_x A x = \langle Ax, x \rangle_{\mathbb{R}^n}$ car $t_A = A$

$$\langle Ax, x \rangle = t_{(Ax)} x = t_x t_A x = t_x A x$$

$A \in S_n(\mathbb{R})$ mq $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow S_p(A) \subset \mathbb{R}_+$?

$\Rightarrow$ soit $\lambda \in S_p(A)$ mq $\lambda \geq 0$?

soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq: $Ax = \lambda x$

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow t_x A x \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle Ax, x \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle \lambda x, x \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2 > 0} \geq 0 \text{ car } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0$$

$\Leftarrow$ on a: $S_p(A) \subset \mathbb{R}_+$ mq $A \in S_n^+(\mathbb{R})$?

soit $x \in \mathbb{R}^n$ mq $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

$A \in S_n(\mathbb{R})$ alors A est diag dans une b.o.n.

soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs propres de A

soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les vp associé à $(e_1, \dots, e_n)$

soit $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans B

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \frac{A e_i}{\lambda_i e_i}, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \lambda_i x_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} \text{ car } B: \text{b.o.n}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i \geq 0 \text{ car } \lambda_i \geq 0 \forall i, S_p(A) \subset \mathbb{R}_+$$

$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow S_p(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ (de même)

$A \in S_n^+(\mathbb{R})$ mq: $\det(A) \leq \left(\frac{\text{tr}(A)}{n}\right)^n$?

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A et $\lambda_i \geq 0 \forall i$ (d'après 1)

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^n$$

$$\underbrace{\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{moyenne géo}} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i}_{\text{moyenne arith}}$$

$\log$ est une fct concave alors:

$$\log\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \lambda_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log(\lambda_i)$$

Δ : f convexe $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)$$

$$f\left(\sum_i \alpha_i a_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(a_i) \text{ et } \sum_i \alpha_i = 1$$

$$\Rightarrow \log \sum_i \frac{1}{n} \lambda_i \geq \sum_i \frac{1}{n} \log(\lambda_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \lambda_i \geq \prod_{i=1}^n e^{\frac{1}{n} \log(\lambda_i)}$$

$$\geq \prod_{i=1}^n e^{(\log(\lambda_i))^{\frac{1}{n}}}$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

si tq $\lambda_i = 0$ l'inégalité reste vraie

3) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

a/ mq $\exists Q \in \text{Gln}(\mathbb{R})$ tq: $t_Q Q = A$?

$A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exists P \in \text{Gln}(\mathbb{R})$ tq:

$A = P D t_P$, D : diagonale

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i > 0 \forall i$$

$$\text{soit } D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ tq : } (D')^2 = D$$

$$\Rightarrow A = P(D')^2 P$$

$$= P D' t_{(P D')} \text{ car : } t_{(P D')} = \underbrace{t_{D'}}_{=D} t_P$$

car $D \in D_n(\mathbb{R})$
(diagonale)

$$\text{on note : } Q = t_{(P D')}$$

$$\Rightarrow A = t_Q Q$$

$$Q \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ car : } \begin{cases} P \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \text{et } D' \text{ diagonale} \\ \text{à diag} > 0. \end{cases}$$

$$\text{b/ } t(t_Q^{-1} B Q^{-1}) = t_Q^{-1} \underbrace{t_B}_{=B} t(t_Q^{-1})$$

car $B \in S_n(\mathbb{R})$

$$= t_Q^{-1} B Q^{-1}$$

$$\Rightarrow t_Q^{-1} B Q^{-1} \in S_n(\mathbb{R}).$$

$$\text{c/ } t_Q^{-1} B Q^{-1} \in S_n(\mathbb{R}),$$

$$\exists P' \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \text{ diag tq :}$$

$$t_Q^{-1} B Q^{-1} = P' D t_{P'}$$

$$B = \underbrace{t_Q P'}_{t_P} D \underbrace{t_{P'} Q}_{P} = t_P D P$$

$$\text{on pose : } P = t_{P'} Q \text{ alors } t_P = t(t_{P'} Q) = t_Q P'$$

$$t_{PP} = t_Q P' \underbrace{t_{P'} Q}_{=I_n} = t_Q Q = A \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{d'après} \\ \text{a/} \end{smallmatrix} \right)$$

car $P' \in O_n(\mathbb{R})$

$$\text{d/ } B \in S_n^+(\mathbb{R}),$$

$$A = t_{PP}, \quad B = t_P D P, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{t_Q^{-1} B Q^{-1}}_{B \in S_n^+(\mathbb{R})} = P' D P^{-1} \quad P \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$\det(A+B) = \det(t_{PP} + t_P D P)$$

$$= \det(t_P (I_n + D) P)$$

$$= \det(t_P) \det(I_n + D) \det(P)$$

$$= \det(t_P) \left(\prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1) \right) \det(P)$$

$$\geq \det(t_P) \cdot \left[\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) + 1 \right] \det(P)$$

$$\geq \det(t_P) (\det(D) + \det(I_n)) \det(P)$$

$$\geq \underbrace{\det(t_P) \det(D) \det(P)}_{\det(B)} + \underbrace{\det(t_P) \det(I_n) \det(P)}_{\det(t_P P) = A}$$

$$\geq \det(B) + \det(A)$$

$$\text{cl : } \det(A+B) \geq \det(A) + \det(B).$$

Ex 14 =

$\forall$ $O_n(\mathbb{R})$ compacte de $M_n(\mathbb{R})$

en dim finie = compacte $\Rightarrow$ fermé + bornée

$A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\| \leq 1$?

$$\|A\|^2 = \text{tr}(t_{AA}) = \text{tr}(I_n) = n$$

$$\Rightarrow \|A\| = \sqrt{n}, \forall A \in O_n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ est bornée ①

* On pose: $(A_n)_n \subset O_n(\mathbb{R})$ tq:

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A, \text{ mq } A \in O_n(\mathbb{R})?$$

$$t_{A_k A_k} = I_n$$

$$\text{mq: } t_{AA} = I_n ?$$

$$\text{mq: } x \mapsto t_{xx} \text{ est continue ?}$$

$$\text{soit: } f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \text{ continue?}$$

$$M \mapsto t_{MM}$$

$M \mapsto t_M$ est continue (linéaire en dim finie)

$(M, M') \mapsto M \times M'$ est continue (bilinéaire + dim finie)

$$f_1: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto (t_M, M) \text{ linéaire} \Rightarrow \text{continue}$$

$$f_2: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$(M, M') \mapsto M \times M' \text{ bilinéaire} \Rightarrow \text{continue}$$

$$f = f_1 \circ f_2 \Rightarrow \text{continue}$$

$$A_k \rightarrow A, f(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(A)$$

$$t_{A_k A_k} \rightarrow t_{AA}$$

$$\underbrace{t_{A_k A_k}}_{= I_n}$$

$$\Rightarrow t_{AA} \rightarrow I_n \Rightarrow A \in O_n(\mathbb{R})$$

$$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq: } t_A = A \text{ et } \langle X, AX \rangle \geq 0 \forall X \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(A_k) \subset S_n^+(\mathbb{R}) \text{ tq: } A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A \text{ mq:}$$

$$A \in S_n^+(\mathbb{R})?$$

$$M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \text{ linéaire}$$

$$M \mapsto t_M \Rightarrow \text{continue}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_k \rightarrow A \\ t_{A_k} \rightarrow t_A \\ \underbrace{t_{A_k}}_{= A_k} \end{array} \right\} t_A = A, A \in S_n(\mathbb{R})$$

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, t_{XX} \geq 0 ?$$

$$f_2: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$M \mapsto MX \text{ linéaire} \Rightarrow \text{continue}$$

$$\text{on a: } t_{X A_k X} \geq 0.$$

$$f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto t_{xy} \text{ continue}$$

$$f_1 = f_1 \circ f_2 \text{ continue}$$

$$A_k \rightarrow A, f(A_k) \rightarrow f(A)$$

- Suite Ex 6:

$$11/ \mathbb{R}_n[X] = \text{vect}(T_0, \dots, T_n)$$

$$\deg(T_i) = i$$

$$(T_i)_i \text{ orthogonale}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}[X] = \text{vect}\{T_k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{mq } (T_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est totale ?}$$

$$\text{il suffit de mq } \mathbb{R}[X] \text{ est dense da}$$

$$C([-1, 1], \mathbb{R})$$

$$T_H \text{ de Weierstrass:}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}[X] \text{ est dense dans } (C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

$$\text{pour } \|\cdot\|_\infty$$

$$\|f\| = \int_0^\pi f(\cos \theta)^2 d\theta \leq \pi \|f\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq \pi \|f\|_\infty$$

$\forall f \in \mathcal{E}([-1,1], \mathbb{R}), \exists (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq :

$$P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

$$\|f - P_n\| \leq \pi \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow P_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$$

alors : $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathcal{E}([-1,1], \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|$.

$\Rightarrow (T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille totale.

12)

$$\mathbb{R}_n[x] = \text{vect}(T_0, \dots, T_n)$$

$$= \text{vect}\left(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \dots, \frac{T_n}{\|T_n\|}\right)$$

P_n : proj orth sur $\mathbb{R}_n[x]$

$$\forall f \in \mathcal{E}([-1,1], \mathbb{R}), P_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$$

$$\sum_{k=0}^n \left\langle f, \frac{T_k}{\|T_k\|} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$$

$$\Rightarrow f = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\|T_k\|^2} \langle f, T_k \rangle T_k$$

$$d(f, \mathbb{R}_n[x]) = \|f - P_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\|P_n(f)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|^2$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|^2$$

13) mq $d(f, \mathbb{R}_n[x])$ est $\searrow$

$$\text{ona} : \mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}_{n+1}[x]$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \|f - P\| \geq d(f, \mathbb{R}_{n+1}[x])$$

$$\inf_{P \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - P\| \geq d(f, \mathbb{R}_{n+1}[x])$$

$$\underbrace{\quad}_{= d(f, \mathbb{R}_n[x])}$$