

* $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ = la série entière de variable complexe z
associé à la suite $= (a_n)_{n \geq n_0}$ suite réelle ou complexe

* $\sum_{n \geq n_0} a_n x^n$ = la série entière de variable réelle x
associé à la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$

⚠ une série entière $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ est toujours c.v pour $|z| = 0$.

① Rayon de convergence = $\exists ! R \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tq =

$ z < R$	$ z > R$
* $\sum a_n z^n$ abs c.v (1)	* $\sum a_n z^n$ n'est pas abs c.v (1')
* $\sum a_n z^n$ c.v (2)	* $\sum a_n z^n$ est divergente (2')
* la suite $(a_n z^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (3)	* la suite $(a_n z^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \neq 0$ (3')
* la suite $(a_n z^n)$ bornée (4)	* la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée (4')

⚠ : $\begin{cases} R = +\infty \Leftrightarrow \sum a_n z^n \text{ c.v } \forall z \in \mathbb{C} \\ R = 0 \Leftrightarrow \sum a_n z^n \text{ div } \forall z \in \mathbb{C}^* \end{cases}$

Séries entières

○ si $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tq vérifie (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow |z_0| \leq R$

○ si $\exists z_1 \in \mathbb{C}$ tq vérifie (1'), (2'), (3'), (4') $\rightarrow |z_1| \geq R$

○ si $\forall |z| < \rho, \sum a_n z^n$ c.v alors $\rho \leq R$

- Prop =

○ pour $\lambda \neq 0, \sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont m même rayon.

○ $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont m même rayon.

- Th = $\sum a_n z^n$ de rayon R_a et $\sum b_n z^n$ de rayon R_b .

○ si $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $a_n = O(\lambda n^\alpha b_n)$ alors $R_a \geq R_b$

○ si $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ tq $a_n \sim \lambda^n b_n$ alors $Ra = Rb$

⚠: si $a_n \sim b_n$ alors $Ra = Rb$

○ si $|a_n| \leq b_n$ alors $Ra \geq Rb$

○ $\sum F(n) z^n$ est tj de rayon $R=1$

↳ Fraction rationnelle en n

* Règle d'Alembert: $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq p$

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ alors:

⚠: $\frac{1}{0} = R = +\infty$

$\frac{1}{+\infty} = R = 0$

- A retenir: $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$R = \frac{1}{l}$$

$\sum_{n \geq 0} \lambda^n z^n$: série entière géométrique

de rayon $R = \frac{1}{|\lambda|}$

② Somme de 2 séries entières:

$\sum (a_n + b_n) z^n$: série entière somme de rayon R .

○ $R \geq \min(Ra, Rb)$

○ si $Ra \neq Rb$ alors $R = \min(Ra, Rb)$

③ Série entière produit:

$\sum_{n \geq 0} c_n z^n$: série entière produit de rayon R ,

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

○ $R \geq \min(Ra, Rb)$

○ $\forall |z| < \min(Ra, Rb), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$

→ Propriétés de la fct somme d'une série entière:

$D_R = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < R \}$ disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$.

$I_R = \{x \in \mathbb{R} / |x| < R\} =]-R, R[= \text{intervalle ouvert de convergence de } \sum a_n x^n$

① Continuité =

- ⊙ $\sum a_n z^n$ c.v. donc c.u. sur tout compact de D_R
- ⊙ si $\sum a_n R^n$ est abs c.v. alors $\sum a_n z^n$ c.v. donc c.u. sur $\overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R\}$

→ Corollaire = $\sum a_n z^n$, de fct somme $S =$

- ⊙ S est continue sur $D_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$
- ⊙ si $\sum a_n R^n$ abs c.v. alors S définie et continue sur $\overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R\}$.

② Intégration = $\sum a_n x^n$ de rayon R . de fct somme = $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

- ⊙ $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est de rayon R . $\forall x \in]-R, R[$
- ⊙ $\forall x \in]-R, R[$, $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

③ Dérivation =

- ⊙ $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ est de rayon R .
- ⊙ S est de classe $\mathcal{E}^1$ sur $] -R, R[$ et on a :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \forall x \in]-R, R[$$

→ Corollaire =

- ⊙ S de classe $\mathcal{E}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1) x^{n-k}$
- ⊙ $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$

Prop = $\forall k \in \mathbb{N}$,

⊙ $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ ✓

○ si $\exists r$ tq: $0 < r < \min(R_a, R_b) / \forall x \in]-r, r[$,
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors = $\boxed{a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}}$.

⚠: Rq = si on a: $x^n, x^{n+1} \Rightarrow$ D'Alembert série num
 si on a: $x^{n+1}, x^{n+3} \Rightarrow$ D'Alembert série entière

→ Fonctions développables en séries entières = (DSE)

* f est DSE en 0 si: $\exists \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$
 $(f:]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{K})$ et $\exists r > 0$ tq: $0 < r \leq \min(R, \alpha)$
 $tq = \forall x \in]-r, r[, \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$ ♥

○ f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
 $\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \in]-r, r[}$ ♥

① Reste de Taylor = $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ = série de Taylor.

$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \boxed{R_n(f)(x)}$

* $R_n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ n app à f . reste de Taylor à l'ordre

* $R_n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ (reste intégrale)

* $R_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$, (centre 0 et x) (Taylor Lagrange) IK = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

○ si $\exists 0 < r \leq \alpha, \exists M > 0$ tq: $|f^{(n)}(x)| \leq M = \text{cte}$ IK = $\mathbb{R}$

alors f est DSE en 0 et on a: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

② Prop = f' DSE en 0 $\Rightarrow f$ DSE en 0 $\Rightarrow f(x) = \underline{f(0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

f, g DSE en 0 alors = $\alpha f + \beta g, fg, \quad | \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$\frac{f}{g}$ ($g(0) \neq 0$) et $g \circ f$ ($f(0) = 0$) sont DSE en 0.