

Proba :

* Rappel = Ω ensemble $\neq \emptyset$

○ $P(\Omega) = \mathcal{P}$ les parties de Ω

○ $\bar{A} = C_{\Omega}^A =$ complémentaire

○ $B|_A = \{x \in B / x \notin A\} = B \cap \bar{A}$
= prise



$$\Delta: B = (B|_A) \cup (A \cap B)$$

* Espace probabilisé :

* Tribu = $\mathcal{A}$ de $P(\Omega)$ vérifiant :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{A}$:
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

* $\emptyset \in \mathcal{A}$

* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{A}$:
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ alors :
 $\{(A_1 \cup \dots \cup A_n) \in \mathcal{A}$
 $(A_1 \cap \dots \cap A_n) \in \mathcal{A}$

* $B|_A \in \mathcal{A}$

⚠ : $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ f. au plus dénombrable de $\mathcal{A}$

$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i \in \mathcal{A}$

* Espace probabilisable :

$(\Omega, \mathcal{A})$ $\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \text{univers} \\ \forall A \in \mathcal{A}, A = \text{événement de } \Omega \end{array} \right.$

○ si $A \cap B = \emptyset$: A et B sont incompatibles.

* système complet d'événements :

$(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ vérifiant (au plus dénombrable)

○ $\forall i, j \in \mathbb{I}, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

○ $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \Omega$

* Probabilité : app

$P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

$A \mapsto P(A)$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'évts a.a.a disjoints, la série

$\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ c.v et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

⚠ : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé

* $P(\emptyset) = 0$

* $A_1, \dots, A_n$ des évts a.a.a disjoints : $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$

* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

* $A \subset B, \begin{cases} P(B|A) = P(B) - P(A) \\ P(A) \leq P(B) \end{cases}$

* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

⚠ : $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ f. au plus dénombrable des évts a.a.a disjoints $\Rightarrow (P(A_i))_{i \in \mathbb{I}}$ est sommable et :

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i\right)$$

* $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ sys. complet d'évts

○ $(P(A_i))_{i \in \mathbb{I}}$ sommable et

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} P(A_i) = 1$$

○ $(P(B \cap A_i))_{i \in \mathbb{I}}$ sommable

et $\sum_{i \in \mathbb{I}} P(B \cap A_i) = P(B)$

* Prob sur univers au plus dénombrable : $\mathcal{A} = P(\Omega)$

$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = P_{\omega} \in \mathbb{R}_+$
 $\rightarrow P$ est une prob sur $(\Omega, P(\Omega))$ $\text{xi} = (P_{\omega})_{\omega \in \Omega}$ et sommable et $\sum_{\omega \in \Omega} P_{\omega} = 1$

* $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

* si $P(A) = 0$ alors A est dit négligeable

* si $P(A) = 1$ alors A est dit presque sur (presque certain)

* Th. continuité croissante :

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite $\uparrow$ ($A_n \subset A_{n+1}$)
 $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

* Th. continuité décroissante :

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite $\downarrow$ ($A_{n+1} \subset A_n$)
 $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

⚠ : $\left. \begin{array}{l} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \\ P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) \end{array} \right\} (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite q.l.g.}$

$$* P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$$

$$* P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

→ par convention = !

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty \text{ si } \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \text{ div}$$

* $(A_i)_{i \in I}$ f. au plus dénombrable
d'év. négligeable $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$
est négligeable.

* Indépendance des évts:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

= A et B sont indépendants

$\Rightarrow$ A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$
sont indépendants.

* $(A_i)_{i \in I}$ est f. d'évts

indép. m: $\forall i, j \in I$

$i \neq j$, A_i et A_j sont indep.

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

$$* P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

avec $I \subset \mathbb{I}$: finie

* Probabilité conditionnelle:

$P(A) \neq 0$ prob de A sachant B

$$P_A(B) \text{ ou } P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

* si $P(B|A) = P(B)$ alors A
et B sont indep.

* Probabilités composées:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) =$$

$$P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

* Probabilités totales:

$(A_i)_{i \in I}$ sys complet d'évts

$$P(A_i) \neq 0, \forall i \in I$$

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \times P(A_i)$$

→ Cas particulier: $0 < P(A) < 1$

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

$$\Delta: P(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

$$P(A_n) \neq 0 \forall n \geq n_0$$

* Formule de Bayes:

$$P(A) \neq 0 \text{ et } P(B) \neq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

* $(A_i)_{i \in I}$ sys complet, $P(A_i) \neq 0$

$$P(B) \neq 0, \forall k \in I, \forall i \in I$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

→ Cas particuliers: $0 < P(A) < 1$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$$

* Variables aléatoires:

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant:

○ $X(\Omega)$ au plus dénombrable

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \underbrace{X^{-1}(\{x\})}_{\in \mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$$

→ Notations Δ :

$$* (X=x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$$

$$* (X \geq x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \geq x\}$$

$$* (X > x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > x\}$$

* $B \subset \mathbb{R}$,

$$(X \in B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

* $\{(X=x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est un sys
complet d'évts.

* $\mathbb{1}_A$ v.a. d'un $(\Omega, \mathcal{F})$

indicatrice

$$\mathbb{1}_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

* Loi d'une v.a.d.:

→ Déterminer la loi X c'est:

○ Déterminer $X(\Omega)$

○ Calculer $P(X=x), \forall x \in X(\Omega)$

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1$$

$$* \forall B \subset \mathbb{R}, P(X \in B) = \sum_{x \in B} P(X=x)$$

* X et Y ont m loi: $X \sim Y$

$$\text{m} \left\{ \begin{array}{l} \text{○ } X(\Omega) = Y(\Omega) \\ \text{○ } \forall x \in X(\Omega), P(X=x) = P(Y=x) \end{array} \right.$$

* v.a. image = X v.a.d

$$f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f \circ X = f(X): \text{v.a. image}$$

* Lois usuelles:

* loi uniforme:

$$X \sim U(X(\Omega)) \text{ m:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{○ } \text{card}(X(\Omega)) = n \in \mathbb{N}^* \text{ (fini)} \\ \text{○ } \forall x \in X(\Omega), P(X=x) = \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

(2)

* Loi de Bernoulli: $p \in [0, 1]$

$$X \sim B(p) \text{ si:}$$

$$\textcircled{1} X(\Omega) = \{0, 1\}$$

$$\textcircled{2} P(X=1) = p$$

⚠: loi de Bernoulli:

expérience = 2 résultats

échec

succès

{ pièce de monnaie

urne à couleurs ...

* Loi binomiale: $p \in [0, 1]$
 $n \in \mathbb{N}^*$

$$X \sim B(n, p) \text{ si:}$$

$$\textcircled{1} X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\textcircled{2} \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, n\},$$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

⚠: loi binomiale:

on répète n fois de façon
indépendante expérience
de Bernoulli

* Loi géométrique: $p \in]0, 1[$

$$X \sim G(p) \text{ si:}$$

$$\textcircled{1} X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\textcircled{2} \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

⚠: loi géométrique:

on répète $+\infty$ fois de façon
indépendante expérience de
Bernoulli.

* $X \sim G(p)$ alors:

$$\textcircled{1} \forall k \in \mathbb{N}, P(X > k) = (1-p)^k$$

$$\textcircled{2} \forall (n, k) \in \mathbb{N}^*,$$

$$P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$$

* X est sans mémoire si:

$$\textcircled{1} X(\Omega) \in \mathbb{N}^*$$

$$\textcircled{1} \forall (n, k) \in \mathbb{N}^*,$$

$$P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$$

⚠: $X \sim G(p) \Leftrightarrow X$ sans
mémoire.

* Loi de Poisson: $\lambda > 0$

$$X \sim P(\lambda) \text{ si:}$$

$$\textcircled{1} X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\textcircled{2} \forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

⚠: $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \sim B(n, p_n)$

avec: $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$

alors $\forall k \in \mathbb{N},$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

* Loi d'un couple - lois
marginales:

→ Déterminer la loi du
couple (X, Y) c'est:

$$\textcircled{1} \text{ Déterminer } X(\Omega) \text{ et } Y(\Omega)$$

$$\textcircled{2} \text{ Calculer: } \forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$$

$$P(X=x, Y=y) =$$

$$P((X=x) \cap (Y=y))$$

⚠: la famille

$\{(X=x, Y=y)\}$ sys complet

$$\textcircled{3} \{P(X=x, Y=y)\} \text{ est}$$

summable.

⚠ la loi de X : 1^{ère} loi

marginale et loi de Y

la 2^{ème} loi marginale

* à retenir:

$$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$

$$P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$

(3)

* Lois conditionnelles:

$$P(X=x | Y=y) = \frac{P(X=x) \cap (Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$= \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$P(Y=y | X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

* à retenir:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x | Y=y) \cdot P(Y=y)$$

$$P(X=x, Y=y) = P(Y=y | X=x) \cdot P(X=x)$$

* Variables. a. indépendantes

$$P(X=x) \cap (Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

si X et Y sont indép alors
 $f(X)$ et $g(Y)$ sont indép.

* Loi n -uplet de v.a.d:

$$\textcircled{1} \text{ déterminer } X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$$

$$\textcircled{2} \text{ Calculer:}$$

$$P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = P(X_1=x_1) \cap \dots \cap (X_n=x_n)$$

* $X_1, \dots, X_n$ mutuellement
indép si:

$$P(X_1=x_1) \cap \dots \cap (X_n=x_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k=x_k)$$

$$P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$$

$$\textcircled{3} X_1, \dots, X_n \text{ indép et}$$

$$f: X_1(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: X_{p+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$
sont indép.

⚠ $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des v.a.d

indép si: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(X_k)_{k \leq n}$ f. des v.a.d indép

* à retenir =
 $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$
 $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$

○ $(Y \leq \alpha) = (X_1 \leq \alpha) \cap \dots \cap (X_n \leq \alpha)$

○ $(Z \geq \alpha) = (X_1 \geq \alpha) \cap \dots \cap (X_n \geq \alpha)$

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a.d, $\forall k \in \mathbb{Z}$

○ $P(X=k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$
 $= P(X > k-1) - P(X > k)$

○ $P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$
 $= P(X < k+1) - P(X < k)$

* **Espérance** =

X d'espérance finie si:

○ $(xP(X=x))$ est sommable

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$
 ↓
 espérance de X

○ si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X=x_k)$

○ si $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable alors:

$\sum_{n \geq 0} x^n P(X=x_n)$ c.v abs et

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$

○ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$\sum_{n \geq 0} n P(X=n)$ c.v et

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n)$

* à retenir =

1/ $X=a=cte$, $E(X)=a$

2/ $X \sim U([1, n])$, $E(X) = \frac{n+1}{2}$

3/ $X \sim B(p)$, $E(X)=p$

4/ $X \sim B(n, p)$, $E(X)=np$

5/ $X \sim G(p)$, $E(X) = \frac{1}{p}$

6/ $X \sim P(1)$, $E(X) = 1$

* X, Y d'esp finie alors

$X+Y$, λX ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont d'esp finie et:

$\begin{cases} E(X+Y) = E(X) + E(Y) \\ E(\lambda X) = \lambda E(X) \end{cases}$

* si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

* si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$

* si $E(X)=0$ alors X est une v.a.d centrée

* $X - E(X)$: v.a.d centrée associée à X .

* **Formule de Transfert** =

XY d'esp finie si:

$(xy P(X=x, Y=y))$ sommable

* $E(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} P(X=x, Y=y)$

→ Cas générale =

$f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$(f(x) P(X=x))$ sommable

et $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$

* $|X| \leq Y \Rightarrow X$ d'esp finie
 ↓
 d'esp finie

* X^2 d'esp finie $\Rightarrow X$ d'esp finie
 (réciproque fautive)

* X^2, Y^2 d'esp finie $\Rightarrow XY$ d'esp finie et:

$(E(XY))^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$

* X, Y d'esp finie et X, Y indep $\Rightarrow Y$ d'esp finie
 et $E(XY) = E(X) E(Y)$

* **Inégalité de Markov** =

X v.a.d positive, d'esp finie

alors $\forall a > 0$,

$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

* **Variance** =

* **moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$** :

si: X^k d'esp finie

$m_k(X) = E(X^k) = \sum x^k P(X=x)$

↳ **moment d'ordre k de X**

* si $X \sim Y$ alors: $m_k(X) = m_k(Y)$

* **Notation** = !!

$L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

v.a.d / X^2 d'esp finie $\}$

$\Rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ev sur $\mathbb{R}$.

* $V(X) = E((X - E(X))^2) \geq 0$.

↓
 variance de X

* $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

X admet variance $(\Leftrightarrow)$

X^2 d'esp finie $(\Leftrightarrow) X \in L_2$.

* si $X(\Omega)$ finie $\Rightarrow V(X)$ existe

* $V(X)$ existe $\Rightarrow E(X)$ existe
 (réciproque fautive)

* à retenir :

○ $X=a=cte \Rightarrow V(X)=0$

○ $X \sim U([1, n]) \Rightarrow V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

○ $X \sim B(p) \Rightarrow V(X) = p(1-p)$

○ $X \sim B(n, p) \Rightarrow V(X) = np(1-p)$

○ $X \sim G(p) \Rightarrow V(X) = \frac{1-p}{p^2}$
 $p \in]0, 1[$

○ $X \sim P(1) \Rightarrow V(X) = 1$
 $\lambda > 0$

* si $V(x)$ existe alors :

$V(ax+b)$ existe et

$$V(ax+b) = a^2 V(x)$$

* écart-type = $(V(x) \text{ existe})$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

si $E(x) = 0$
et $\sigma(x) = 1$) x centrée
et réduite

$$x^* = \frac{x - E(x)}{\sigma(x)} = \text{la}$$

variable centrée réduite
associée à x

* Inégalité de Tchebychev :

$\forall \varepsilon > 0,$

$$P(|x - E(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(x)}{\varepsilon^2}$$

* Covariance :

$$\text{Cov}(x, y) = E((x - E(x))(y - E(y)))$$

* x d'esp finie, $\forall a \in \mathbb{R},$

$$\text{Cov}(a, x) = 0$$

* $\text{Cov}(x, y)$ existe $\Leftrightarrow x, y$ et

xy d'esp finie

$$\text{Cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

* si $x, y \in L_2$ alors

$\text{Cov}(x, y)$ existe.

$$\text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(y, x)$$

$$\text{Cov}(x, x) \geq 0$$

$$= V(x)$$

$$\text{Cov}(\lambda x + y, z) = \lambda \text{Cov}(x, z) + \text{Cov}(y, z)$$

$$\text{Cov}(x, \lambda y + z) = \lambda \text{Cov}(x, y) + \text{Cov}(x, z)$$

$$\text{Cov}(x+y) = \text{Cov}(x) + \text{Cov}(y) +$$

$$2 \text{Cov}(x, y)$$

* si on a : $x_1, \dots, x_n \in L_2$

et a^i indép alors :

$$V(x_1 + \dots + x_n) = V(x_1) + \dots + V(x_n)$$

* Loi faible des grands

nombre :

$(x_n)_{n \geq 1}$ suite des v.a.d

et a^i indép, de m loi

et de moment d'ordre $a,$

$$m = E(x_1), \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\forall \varepsilon > 0,$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

* Fonctions génératrices :

x v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$

soit la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} P(X=n) t^n \text{ de rayon } R$$

$$t_0 = R \geq 1.$$

$$\forall t \in]-R, R[,$$

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

est génératrice de x .

$$\text{Cov}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n = E(t^x)$$

* si x v.a.d finie :

$G_x(t)$ définie $\forall t \in \mathbb{R}$

polynôme ent.

* $G_x(t)$ de classe E^∞ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{G_x^{(n)}(0)}{n!}$$

* $x \sim y$ alors $G_x = G_y$

* G_x définie et continue

sur $[-1, 1]$.

(5)

$$|G_x(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$\text{et } G_x(1) = 1$$

* si $R > 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$

$\forall t \in]-R, R[$ on a :

$$G_x^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-(k-1)) \cdot P(X=n) t^{n-k}$$

$$\Rightarrow G_x^{(k)}(1) = E(X(X-1) \dots (X-(k-1)))$$

* si $R > 1, \forall k \in \mathbb{N},$

$$E(X(X-1) \dots (X-(k-1))) = G_x^{(k)}(1)$$

$$\Rightarrow E(x) = G_x'(1)$$

$$V(x) = G_x''(1) + G_x'(1) - (G_x'(1))^2$$

* à retenir :

1/ $x \sim U(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors :

$$G_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n t^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2/ $x \sim B(p) :$

$$G_x(t) = (1-p) + pt, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

3/ $x \sim B(n, p) :$

$$G_x(t) = ((1-p) + pt)^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4/ $x \sim G(p), p \in]0, 1[:$

$$G_x(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}, \quad \forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$$

5/ si $\lambda > 0, x \sim P(\lambda) :$

$$G_x(t) = e^{\lambda(t-1)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

soient : x, y 2 v.a.d indép

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n \quad \forall t \in]-R_1, R_1[$$

$$G_y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) t^n \quad \forall t \in]-R_2, R_2[$$

soit : $R = \min(R_1, R_2)$

$$\forall t \in]-R, R[,$$

$$G_{x+y}(t) = G_x(t) \cdot G_y(t)$$

① $X_1, \dots, X_n$ des v. a. d
indép.

$$\text{soit : } S = X_1 + \dots + X_n$$

$$\forall 1 \leq k \leq n,$$

$$G_{X_k}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_k = n) t^n,$$

$$\forall t \in]-R_k, R_k[$$

$$\text{soit : } R = \min(R_1, \dots, R_n)$$

$$\forall t \in]-R, R[,$$

$$G_S(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t).$$