

INTEGRATION

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 &1- \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx \quad 2- \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{1-x}} dx \quad 3- \int_0^1 \frac{(\operatorname{sh}(x))^a}{x^2} dx \quad 4- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(3x)}{\sin^2(2x)} dx \quad 5- \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} dx \\
 &6- \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-2x} dx \quad 7- \int_0^{+\infty} \cos(x) \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^3 dx \quad 8- \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^a} \quad 9- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(\tan(x)) dx \\
 &10- \int_0^1 \frac{\ln(1+\sin(x)) - \operatorname{sh}(\ln(1+x))}{\operatorname{th}(x^5)} dx \quad 11- \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x|\ln(x)|^a} \quad 12- \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right) dx \quad 13- \int_0^1 \frac{(\operatorname{sh}(x))^a}{x^2} dx \\
 &14- \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} dx \quad 15- \int_1^e \frac{1}{\ln(x)} dx
 \end{aligned}$$

Exercice 2.

1) Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} (\cos t) e^{-at} dt, (a > 0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\arctan t)^2}{1+t^2} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x| dx}{1+x^4}, \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx. \\
 &\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx, \quad \int_0^{+\infty} (3x^2 - x + 1) e^{-2x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt, \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) dx.
 \end{aligned}$$

2) Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\int_1^{+\infty} f(t) dt, \quad \left(f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} & \text{si } t \in]0,1] \\ \frac{1}{t^2 \sqrt{t^2-1}} & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases} \right), \quad \int_0^{+\infty} \frac{E(t)}{(1+t)^3} dt, \quad \left(\text{utiliser } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right). \\
 &\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} E\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt, \quad \left(\text{utiliser } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma \right).
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}, \quad \int_0^{\pi} \frac{dt}{3-2\cos^2 t}, \quad \int_0^1 \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} dt, \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} \\
 &\int_0^{+\infty} (x + \sqrt{x}) e^{-\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t} \right) dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x (1 + \operatorname{sh} x)}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 4.

1-a- Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ converge.

b- A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

2- En déduire la valeur de $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx$, où a est un réel strictement positif.

Exercice 5. On pose :

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}$$

1. Etudier l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$.
2. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} f(t) dt \quad \text{puis} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

3. Démontrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\int_a^b \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin u}{u^2} du - \frac{3}{4} \int_b^{3b} \frac{\sin u}{u^2} du$$

4. Prouver l'existence puis calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt.$$

Exercice 6. On définit la fonction f par $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

- 1- Quel est le domaine de définition de f ? Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

- 2- Montrer que : $\forall x > 1, f(x) = \frac{x-1}{x} f(x-2)$. (On pourra partir de $f(x-2) - f(x)$ et effectuer une intégration par parties). En déduire la valeur de $f(2)$ et de $f(3)$.

- 3 - Montrer que la fonction f est positive et décroissante sur son domaine.

- 4 - Prouver que : $\forall x \in D_f, f(x) \geq \frac{1}{x+1}$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Exercice 7.

1. Montrer la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

2. Justifier la convergence et montrer que :

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt = -2J.$$

3. Prouver l'existence et établir que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt. \quad -2J$$

4. Pour tout entier naturel n , justifier l'existence et calculer u_n où :

$$u_n = \int_0^1 t^n \ln t dt.$$

5. Montrer que pour tout entier naturel n , l'on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k u_k = J + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1+t} dt.$$

6. Démontrer que pour tout entier naturel n

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{(n+2)^2}.$$

7. En déduire que :

$$J = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{on admet que} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 8.

1. Justifier la convergence et montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

2. Etablir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx. \quad (\text{Poser } t = e^x).$$

En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. On considère l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$. Montrer que J est convergente et calculer sa valeur.

4. Pour $\alpha > 0$, on considère l'intégrale $K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$. Pour quelles valeurs de α l'intégrale $K(\alpha)$ est-elle convergente ? Calculer $K\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 9. On pose pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x)$ existe et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa fonction dérivée.
3. Démontrer que :

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad F(x) - F(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

4. Donner le tableau de variations et tracer la courbe représentative de F .
5. Montrer que F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer son intégrale sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10. (L'intégrale de Gauss)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir l'existence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

puis montrer que :

$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n.$$

3. On considère l'intégrale de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \quad \text{et on admet que } W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

- a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = W_{2n+1}$ et $J_{n+1} = W_{2n}$.
b) En déduire la valeur de l'intégrale I puis la valeur de l'intégrale : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Exercice 11. (Intégrales eulériennes)

1. Soient $b > a > 0$. Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\mathcal{J}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$:

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale $\mathcal{I}(a, b)$.
 4. Soit $x > -1$. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t} dt.$$

Exercice 12. (La fonction Gamma d'Euler)

1. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x \in]0, +\infty[$. On note :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Cette fonction Γ est appelée la fonction gamma d'Euler.

2. Prouver que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$ et que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 3. Soit $x > 0$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

4. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)$ puis la valeur de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} (2t^4 - 3t^3 + t^2 + 2t - 5)e^{-t} dt$.
 5. Montrer que $\forall x > 0$:

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt.$$

6. En utilisant l'exercice 10, calculer $\Gamma(1/2)$ puis $\Gamma(n+1/2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 7. On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

- a) Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 2\sqrt{x}.$$

- b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
 c) Justifier la convergence et prouver que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{x\sqrt{x+1}}$$

Exercice 13. (L'intégrale de Dirichlet)

1. Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[$:

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1 - \cos 2t}{2t}.$$

En déduire que la fonction : $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

2. En utilisant une intégration par partie montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Cette intégrale est appelée l'intégrale de Dirichlet.

3. Montrer le noyau de Dirichlet :

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}, \quad \forall t \in]0, \pi[.$$

4. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0.$$

5. On pose :

$$f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \quad \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{et } f(0) = 0.$$

Justifier l'existence et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(2n+1)t dt = \frac{\pi}{2} - I_n \quad \text{où } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt.$$

6. Calculer la limite de la suite (I_n) . En déduire, à l'aide d'un changement de variable dans I_n que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

- Ex 4:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

1) a/

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} \text{ continue sur }]0,1].$$

$$f(x) \sim_{0^+} \ln(x) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$$

$\Rightarrow f$ intégrable sur $]0,1]$ alors $\int f$ c.v

$$b/ I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{c.v}} \text{ on pose: } t = 1/x \\ x = 1/t \\ dx = -1/t^2 dt \end{aligned}$$

$$I = \int_{+\infty}^1 \frac{\ln(1/t)}{1+(1/t)^2} \cdot (-1/t^2) dt$$

$$= - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$$

$$\text{Q: } I = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx$$

$$2/ a > 0, J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+(x/a)^2} dx$$

$$\xrightarrow{\text{c.v}} \begin{cases} t = x/a \\ x = a \cdot t \Rightarrow dx = a \cdot dt \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(at)}{1+t^2} a dt$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a) + \ln(t)}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(a)}{1+t^2} + \frac{\ln(t)}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{a} \left(\ln(a) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \right)$$

$$= \frac{1}{a} \left(\ln(a) \left[\underbrace{\arctan(t)}_{\pi/2} \right]_0^{+\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt}_I + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt}_{-I} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2a} \cdot \ln(a).$$

- Ex 5:

$$1/ f(t) = \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}$$

f continue sur $]0,1]$.

$$f(t) = \frac{\sin t - t}{t^2} \sim_{0^+} \frac{-t^3/6}{t^2} = -\frac{t}{6} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t^{-1}}$$

$\Rightarrow f$ intégrable sur $]0,1]$

(car $-1 < 1$).

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} f(t) dt = 0$$

car: f intégrable sur $]0,1]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} + f(t) \right) dt =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_x^{3x} \frac{1}{t} dt}_{\left[\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right]_x^{3x}} + \underbrace{\int_x^{3x} f(t) dt}_0 = \ln(3)$$

$$3/ \int_a^b \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = ? \quad \forall a, b > 0:$$

linéariser $\sin^3(t)$:

- Rappel:
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i} (e^{it} - e^{-it})^3$$

$$= -\frac{1}{8i} (e^{i3t} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-i3t})$$

$$= -\frac{1}{8i} (e^{i3t} - e^{-i3t} - 3(e^{it} - e^{-it}))$$

$$= -\frac{1}{8i} (2i \sin(3t) - 6i \sin(t))$$

$$= \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$$

$$\int_a^b \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt = \int_a^b \left(\frac{3}{4} \frac{\sin(t)}{t^2} - \frac{1}{4} \frac{\sin(3t)}{t^2} \right) dt$$

$$= \frac{3}{4} \int_a^b \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{\sin(3t)}{t^2} dt$$

c.v $\Rightarrow$ on pose: $u = 3t$

$$= \frac{3}{4} \int_a^b \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_{3a}^{3b} \frac{\sin(u)}{u^2/9} \frac{1}{3} u du$$

$$= \frac{3}{4} \int_a^b \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_{3a}^{3b} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

$$= \frac{3}{4} \int_a^b \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_a^a \frac{\sin(u)}{u^2} du - \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

$$+ \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du - \frac{3}{4} \int_{3b}^{3b} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

$$= \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin(u)}{u^2} du - \frac{3}{4} \int_b^{3b} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

$$4/ K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt.$$

*/ $h(t) = \frac{\sin^3 t}{t^2}$ continue sur $]0, +\infty[$.

$h(t) \sim_{0^+} \frac{t^3}{t^2} = t = \frac{1}{t^{-1}}$

$\Rightarrow h(t)$ intégrable sur $]0, 1]$.

*/ $|h(t)| \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow h$ intégrable sur $[1, +\infty[$

Q: h intégrable sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow K$ existe.

$$*/ K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt =$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{\sin^3 t}{t^2} dt =$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_b^{3b} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right)$$

$$= \frac{3}{4} \ln(3) - \frac{3}{4} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_b^{3b} \frac{\sin t}{t^2} dt}_0$$

car $\left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

et $\lim_{b \rightarrow +\infty} b = \lim_{b \rightarrow +\infty} 3b = +\infty$.

Q: $K = \frac{3}{4} \ln(3)$.

- Ex 6:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

1/ $h(t) = \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]0,1[$

et ≥ 0 donc $f(x)$ existe si:

h intégrable sur $]0,1[$. ①

$h(t) \underset{0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ intégrable sur $]0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow \begin{cases} -x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$ ②

$h(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}$ ③

$\underset{1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}(1-t)^{1/2}}$ intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$

(2), (3):

h intégrable sur $]0,1[$ si:

$x > -1$ ④

(1), (4):

$f(x)$ existe si: $x > -1$

c.a.d: $D_f =]-1, +\infty[$

* $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin(t)]_0^1$

$f(0) = \frac{\pi}{2}$

* $f(1) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{1}{=} \int_0^1 \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} dt$
 $= -\frac{1}{2} [\sqrt{1-t^2}]_0^1 = 1$

2/ $f(x-2) - f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-2}}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt$
 $= \int_0^1 \frac{t^{x-2}(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$$= \int_0^1 \underbrace{t^{x-2}}_{pr} \underbrace{(\sqrt{1-t^2})}_{dv} dt.$$

I.P.P $\Rightarrow \left[\frac{t^{x-1}}{x-1} \times \sqrt{1-t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{x-1} \times \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} dt$

$$= \frac{1}{x-1} \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{x-1} \cdot f(x)$$

donc $f(x-2) - f(x) = \frac{1}{x-1} \cdot f(x)$

$\Rightarrow f(x-2) = \frac{1}{x-1} f(x) - f(x)$

$= f(x) \left(\frac{1}{x-1} - 1 \right)$

①: $f(x) = \frac{x-1}{x} f(x-2) \cdot \frac{x}{x-1}$

* $f(2) = \frac{1}{2} f(0) = \frac{\pi}{4}$

* $f(3) = \frac{2}{3} f(1) = \frac{2}{3}$

2/ $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt.$

$\forall x \in D_f =]-1, +\infty[.$

$\forall t \in]0,1[, t \mapsto \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0.$

c.a.d: $f(x) \geq 0 \forall x \in D_f.$

* soit $x, y \in D_f =]-1, +\infty[$

avec: $x \leq y$

$t^x = e^{x \ln(t)}, t^y = e^{y \ln(t)}$

$\forall]0,1[, x \leq y \Rightarrow x \ln(t) \geq y \ln(t)$
 $t^x \geq t^y$

$\Rightarrow \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \geq \frac{t^y}{\sqrt{1-t^2}}$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq \int_0^1 \frac{t^y}{\sqrt{1-t^2}} dt \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Q: f est $\downarrow$ $\forall$ sur D_f .

4/ $\forall t \in]0,1[, 0 < \sqrt{1-t^2} \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \geq t^x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt &\geq \int_0^1 t^x dt \\ &= \left[\frac{1}{x+1} t^{x+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x+1} \quad \forall x \in D_f.$$

$$\times \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty.$$

-Ex 7:

$$1/ \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

$f(t) = \frac{\ln t}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$

$f(t) \sim \ln t$ int sur $]0,1]$

car: $t^{\frac{1}{2}} \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ ($\frac{1}{2} < 1$)

$\Rightarrow f(t)$ int sur $]0,1]$ d'où

$\int$ converge.

$$2/ \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt$$

$g(t) = \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2$ est continue sur $]0,1]$

$g(t) \sim \ln^2(t)$ int sur $]0,1]$

car: $t^{\frac{1}{2}} \ln^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ ($\frac{1}{2} < 1$)

$\Rightarrow g(t)$ int sur $]0,1]$

alors $\int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt$ existe.

et:

$$* \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 = -2J ??$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt \Rightarrow \text{I.P.P}$$

$$\left[\left(\frac{-1}{1+t} + 1 \right) \cdot \ln^2(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t} \cdot 2 \cdot \frac{1}{t} \ln(t) dt$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = -2J$$

$$3/ L = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt.$$

$g(t) = \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2$ continue sur $]0, +\infty[$

a) $\Rightarrow \int_0^1 g(t) dt$ converge. ①

$$g(t) \sim \frac{(\ln t)^2}{t^2} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(\ln t)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} = 0$$

$\Rightarrow g$ int sur $[1, +\infty[$

alors $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ existe. ②

(1,2) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

$$L = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt + \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt + \int_1^0 \left(\frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \right)^2 \cdot \frac{-1}{x^2} \left| t = \frac{1}{x} \right. dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt + \int_0^1 \left(\frac{\ln x}{x+1} \right)^2 dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{\ln t}{1+t} \right)^2 dt.$$

$$U_n = \int_0^1 t^n \cdot \ln(t) dt$$

4/ $f(t) = t^n \cdot \ln(t)$ continue sur $]0,1]$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{2}} \cdot t^n \cdot \ln(t) = 0 \quad \forall n$ ($\frac{1}{2} < 1$)

$\Rightarrow f$ int sur $]0,1]$: $\int_0^1 t^n \cdot \ln(t) dt$

$$U_n = \int_0^1 t^n \cdot \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$U_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = -\frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}
5/ \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k \ln(t) dt \\
&= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k \cdot t^k \cdot \ln(t) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \cdot t^k \ln(t) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\ln(t) \cdot \sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\ln(t) \cdot \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t} \cdot (1 + (-1)^{n+1} t^{n+1}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t} + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln(t)}{1+t} \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln(t)}{1+t} dt
\end{aligned}$$

$$6/ \left| \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1+t} dt \right| =$$

$$- \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1+t} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1} \cdot (-\ln t)}{1+t} dt$$

$$\forall t \in]0, 1], \quad \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{t^{n+1} \cdot (-\ln t)}{1+t} \leq t^{n+1} \cdot (-\ln t)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^{n+1} \cdot (-\ln t)}{1+t} dt &\leq - \int_0^1 t^{n+1} \ln(t) dt \\
&= -u_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7/ \text{on admet que: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\
S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k = J + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1+t} dt \\
S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(1+k)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} \\
S_n &= J + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1+t} dt \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{bornée} \quad \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad 6/ \\
J &= -\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

- Ex 8 :

$$1/ f(t) = \frac{1}{1+t^t} \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

$$f \sim_{+\infty} \frac{1}{t^t} : f \text{ int sur } [1, +\infty[$$

donc f int sur $[0, +\infty[$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^t} \text{ converge.}$$

$$\begin{aligned}
* \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^t} dt &\stackrel{\text{c.v}}{=} t = \frac{1}{x} \\
x &= \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

$$= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^t} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^t} dt$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^t} dt &\stackrel{\text{c.v}}{=} t = e^x \\
dt &= e^x \cdot dx \\
x &= \ln(t)
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2x}}{1+e^{tx}} e^x \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x + e^{3x}}{1+e^{tx}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{tx} + e^{-tx}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx. \quad \boxed{\int \frac{y'}{1+y} = \arctan(y)}$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{1 + 2 \operatorname{sh}^2(x)} dx$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} x}{1 + 2 \operatorname{sh}^2(x)} dx$$

$$= \sqrt{2} [\operatorname{Arctan}(\sqrt{2} \operatorname{sh} x)]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$3/ \mathcal{I} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$$

$$* f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

f int sur $]0, +\infty[$ car :

$$\begin{cases} f(t) \sim_{0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \mathcal{I} \text{ converge.} \\ f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \end{cases}$$

$$f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$$

$$* \mathcal{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt \xrightarrow{\text{c.v}} \begin{matrix} x = \sqrt{t} \\ t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{matrix}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^4)} 2x dx$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\underbrace{(x^2+\sqrt{2}x+1)}_{(1)} \underbrace{(x^2-\sqrt{2}x+1)}_{(2)}}$$

$$= \frac{ax+b}{(1)} + \frac{cx+d}{(2)}$$

$$4/ \alpha > 0, K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$$

$$h(t) = \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} \text{ continue et } \geq 0 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$K(\alpha) \text{ converge} \Leftrightarrow h \text{ int sur }]0, +\infty[$$

$$h(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t^\alpha} : h \text{ int sur } [1, +\infty[\text{ssi : } \alpha > 1$$

$$h(t) \sim_0 \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}} : h \text{ int sur }]0, 1] \text{ssi : } \alpha - 1 < 1 \Rightarrow \alpha < 2$$

Donc : h int sur $]0, +\infty[$ ssi :

$$\Rightarrow K(\alpha) \text{ converge : } 1 < \alpha < 2$$

$$* K\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2}} dt$$

$$\xrightarrow{\text{I.p.p}} = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{-3/2}}_{pr} \cdot \underbrace{\arctan t}_{dr}$$

$$= \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} t^{-\frac{3}{2}+1} \cdot \arctan(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)} dt \stackrel{2/}{=} \mathcal{I}$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi \cdot \sqrt{2}$$

- Ex 9 :

$$x > 0, F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt.$$

$$1/ \text{ soit } x > 0, h(t) = \frac{e^{-xt}}{t} \text{ continue sur } [1, +\infty[$$

$$t^q. h(t) = t \cdot e^{-xt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\Rightarrow h \text{ int sur } [1, +\infty[\Rightarrow F(x) \text{ existe}$$

5/ $\ast F$ continue car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \theta\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ int sur $[1, +\infty[$ ($2 > 1$)

$\Rightarrow F$ int sur $[1, +\infty[$

$$F(x) - F(1) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$$

$\downarrow$
 $x \rightarrow 0^+$
 $+\infty$

donc: $F(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^{1/2} \ln(x) = 0$$

$\Rightarrow F$ int sur $]0, 1]$

Q: F int sur $]0, +\infty[$.

$$\ast \int_0^{+\infty} F(x) dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{Pr} \underbrace{F(x)}_{dv} dx$$

$$\xrightarrow{\text{I.P.P}} = \left[\underbrace{x \cdot F(x)}_0 \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \cdot F'(x) dx$$

or:

$$\ast F(x) \underset{+\infty}{\sim} \theta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\varepsilon(x)}_0 \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

$$\ast F(x) \underset{0^+}{\sim} -x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F(x) dx &= + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

-Ex10:

à retenir: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x \geq 1+x$$

1/ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{soit } \varphi(x) = e^x - x - 1$$

$$\varphi'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		0	

$$\Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1+x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \ast e^{-t^2} &\geq 1-t^2 \\ e^{t^2} &\geq 1+t^2 \end{aligned} \right\} 1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

2/ $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ast I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$f(t) = e^{-t^2}$ continue sur $[0, +\infty[$

$$t^n \cdot f(t) = t^n \cdot e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow f$ int sur $[0, +\infty[$: I existe

$$\ast J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

$g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ continue sur $[0, +\infty[$

$$g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} \text{ or } n \in \mathbb{N}^*: 2n > 1$$

$\Rightarrow g$ int sur $[1, +\infty[$ donc int sur

$[0, +\infty[$: J_n existe

$$\ast I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

$t \mapsto (1-t^2)^n$ continue sur $[0, 1]$: I_n existe

$$* I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n ?$$

$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq 1 - t^2 \leq e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow (1 - t^2)^n \leq e^{-nt^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$$

$$\Rightarrow I_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt \xrightarrow{\text{c.v.}} x = \sqrt{n}t$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{n}} dx = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, \frac{1}{1+t^2} \geq e^{-t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^n} \geq e^{-nt^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{I_n}{\sqrt{n}} \leq J_n$$

$$b/ W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$c/ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \xrightarrow{\text{c.v.}} t = \sin x$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(x) dx = W_{2n+1}$$

$$* J_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$\xrightarrow{\text{c.v.}} t = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan(t)$$

$$dt = 1 + \tan^2(x) dx$$

$$J_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \tan^2 x)^n} (1 + \tan^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos^2 x)^n} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx = W_{2n}$$

$$b/ \sqrt{n} I_n \leq I \leq \sqrt{n} J_n \quad (1)$$

$$* \sqrt{n} I_n = \sqrt{n} \cdot W_{2n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

$$\sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$* \sqrt{n} J_n = \sqrt{n} \cdot W_{2n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(1): n \rightarrow +\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq I \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{ll: } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} : \text{intégrale de Gauss.}$$

$$* \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

- Ex 11 :

1/ $b > a > 0$,

$$f(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

$$f(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \text{ continue sur }]0, +\infty[.$$

$$* f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{(b-a)t}{t} = (b-a) = \frac{b-a}{t^0}$$

$\Rightarrow f$ int sur $]0, 1[$. $(0 < 1)$

$$* t^2, f(t) = t e^{-at} - t e^{-bt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$\Rightarrow f$ int sur $[1, +\infty[$.

Q : f int sur $]0, +\infty[$: $f(a,b)$ converge

2/ $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt =$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{e^{-at}}{t} - \frac{e^{-bt}}{t} \right) dt =$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt =$$

$$\xrightarrow{\text{c.v}} x = at \quad \xrightarrow{\text{c.v}} u = bt$$

$$\int_{\varepsilon_a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{a} dx - \int_{\varepsilon_b}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \cdot \frac{1}{b} du =$$

$$\int_{\varepsilon_a}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_{+\infty}^{\varepsilon_b} \frac{e^{-u}}{u} du =$$

$$\int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \left(\frac{1}{t} + \frac{\bar{e}^t - 1}{t} \right) dt$$

$$= \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{1}{t} dt - \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{1 - \bar{e}^t}{t} dt$$

$$= [\ln t]_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} - \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{1 - \bar{e}^t}{t} dt$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{1 - \bar{e}^t}{t} dt.$$

$$3/ f(a,b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{1 - \bar{e}^t}{t} dt \quad (1)$$

or :

$$\frac{1 - \bar{e}^t}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1 : \text{int sur }]0, 1[$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_a \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \\ \varepsilon_b \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{array} \right\} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{1 - \bar{e}^t}{t} dt = 0 \quad (2)$$

$$\underline{Q} : f(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4/ $x > -1$,

$$K = \int_0^1 \frac{(t-1) \cdot t^x}{\ln t} dt$$

$$\boxed{\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1}$$

$$h(t) = \frac{(t-1) \cdot t^x}{\ln t} \text{ continue sur }]0, 1[$$

$$h(t) \underset{(1)^-}{\sim} \frac{t-1}{t-1} = 1 = \frac{1}{(1-t)^0}.$$

h int sur $[\frac{1}{2}, 1[$

$$h(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{-t^x}{\ln(t)}$$

$$t^{-x}, h(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

avec $-x < 1$

Donc h int sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Q : h int sur $]0, 1[$ donc K existe

$$x \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t} dt$$

$$\xrightarrow{\text{c.v.}} \begin{matrix} t = e^{-u} \\ u = -\ln(t) \end{matrix}$$

$$= \int_{+\infty}^0 \frac{(e^{-u}-1) \cdot e^{-xu}}{-u} (-e^{-u}) du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-u}) \cdot e^{-(x+1)u}}{u} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)u} - e^{-(x+2)u}}{u} du$$

$$= J(x+1, x+2) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).$$

Ex 12:

4/ $h(t) = t^{x-1} \cdot e^{-t}$ continue sur $]0, +\infty[$

$v(t) \underset{0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ int sur $]0, 1]$

cri: $1-x < 1$
 $|x| > 0$

$v(t) \cdot t^2 = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc h int sur $[1, +\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow h$ int sur $]0, +\infty[$ cri: $|x| > 0$

on note $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

s'appelle fct Gamma d'Euler.

2/ $t \mapsto t^{x-1} \cdot e^{-t}$ continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt > 0 \Rightarrow \Gamma(x) > 0 \quad \forall x > 0$

$$x \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^x}_{Dr} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{Pr} dt$$

$$\xrightarrow{\text{I.p.p.}} = \underbrace{\left[-t^x \cdot e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_0 - \int_0^{+\infty} -x t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

3/ $x > 0$, Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) ?$$

par récurrence:

$n=1$: vrai car: $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x$ (D'après 2)

supposons que: $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$

mq: $\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x)} = \prod_{k=0}^n (x+k)$

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x+1)} \times \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} =$$

$$(x+n) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) =$$

$$\prod_{k=0}^n (x+k).$$

4/ $x=1 \xrightarrow{\text{d'après 3):}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1)$
 $= \prod_{k=1}^n k = n!$

or: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$

Q: $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$$* \int_0^{+\infty} (2t^4 - 3t^3 + t^2 + 2t - 5) \cdot e^{-t} dt$$

$$= 2\Gamma(5) - 3\Gamma(4) + \Gamma(3) + 2\Gamma(2) - 5\Gamma(1)$$

$$= 2 \cdot 4! - 3 \cdot 3! + 2! + 2 \cdot 1! - 5 = 29$$