

Exercice 1 :

1. Etudier dans chacun des cas suivants la nature de la série de terme général u_n :

a) $u_n = 1 - \frac{n}{2} \ln \frac{n+1}{n-1}$, b) $u_n = \frac{n+3^n}{\ln n + 4^n}$, c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+z}$ ($z \in \mathbb{C}$), d) $u_n = \frac{n^\alpha + \ln^2(n)}{n^2 + \cos n}$, e) $u_n = \frac{a^n}{n! + \ln n}$,
 f) $u_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n + n!}$, g) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n}}$ ($a > 0$), h) $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$, i) $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 2})$.

2. Dans chacun des cas suivants montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n :

a) $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ ($n \geq 3$), b) $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$, c) $u_n = \frac{a^{2n} \sin(n\theta)}{(1+a^2)^n}$, d) $u_n = (n^2 - 2)a^n/n!$.

3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes : *les séries*

a) $\sum \max(u_n, v_n)$, b) $\sum \sqrt{u_n v_n}$, c) $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$, d) $\sum u_n^\alpha v_n^{1-\alpha}$, $\alpha \in [0,1]$
 e) $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$, f) $\sum u_n^2$, g) $\sum \ln(1 + u_n)$, h) $\sum (1 - \cos u_n)$, i) $\sum ((1 + u_n)^\alpha - 1)$

Exercice 2 : (La série harmonique et la constante d'Euler)

On pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \gamma_n = H_n - \ln n.$$

1. Montrer que :

$$H_n \sim \ln n.$$

2. Montrer que :

$$(\gamma_n - \gamma_{n+1}) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

3. En déduire que la suite (γ_n) est convergente. (On note γ sa limite, γ est appelée la constante d'Euler).

4. ~~Par comparaison avec intégrale~~ établir que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n} \text{ puis que } H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow +\infty.$$

5. Application 1 : montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \left(\text{Exprimer } \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ en fonction } H_{2n+1} \text{ et } H_n \right).$$

6. Application 2 : justifier l'existence et calculer l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt.$$

7. Application 3 : on pose pour tout $n \geq 3$:

$$U_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \ln k}{k}, \quad V_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} \quad \text{et} \quad W_n = V_n - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

a) Prouver que la série est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

$$\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

- b) En comparant avec une intégrale donner un équivalent simple de V_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 c) Justifier que la suite $(W_n)_{n \geq 3}$ est convergente. On pourra utiliser la série de terme général :

$$\frac{\ln k}{k} - \int_{k-1}^k \frac{\ln t}{t} dt.$$

- d) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $U_{2n} = V_n - V_{2n} + (\ln 2)H_n$. En déduire que :
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2.$$

Exercice 3 : (Les séries de Riemann)

On considère les fonctions suivantes :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \gg 1 \quad \text{et} \quad \mu(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad s \gg 0.$$

- Déterminer les domaines des fonctions ζ et μ .
- Par comparaison avec intégrale, montrer que $\forall s \in]1, +\infty[$:

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}.$$

En déduire un équivalent simple de ζ au voisinage de 1.

- Vérifier que $\forall s \in]1, +\infty[$: $\mu(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ puis calculer $\mu(1)$. (On admet que μ est continue en 1).
- Donner une majoration $|\mu(s) - 1|$ en déduire les limites de $\mu(s)$ puis $\zeta(s)$ quand $s \rightarrow +\infty$.
- Vérifier que $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right].$$

- Etablir que $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

En déduire la limite de $\mu(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 4 : (La fonction téta)

- On pose :

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

- Justifier l'existence de $\theta(x)$ pour tout $x > 0$.
- Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x(x+1)} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{x}.$$

- Donner un équivalent simple de $\theta(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- Montrer que θ est strictement décroissante et dresser son tableau de variations.

- On note :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction φ .
- Montrer que pour tout entier naturel n , l'on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{k+x-1} dt = \varphi(x) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt.$$

- En déduire que pour tout $x > 0$, $\theta(x) = \varphi(x)$.
- Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 5 : (Transformation d'Abel)

On pose pour tout $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$:

$$u_n = \frac{z^n}{n^x}$$

1. Etudier la nature de la série de terme général u_n lorsque $|z| < 1$, $|z| > 1$ puis $z = \pm 1$.
2. Dans cette question $z = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1.
 - a) Etudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas : $x > 1$ et $x \leq 0$.
 - b) Dans le cas où $0 < x \leq 1$ et $z \neq 1$, on pose : $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n z^k$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k^x} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) + \frac{S_n}{n^x}$$

En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 6 : (Reste d'une série convergente)

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement s'il existe une suite convergente (v_n) telle que $u_n = v_n - v_{n+1}$.
2. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. On note R_n le reste d'indice n de la série.
 - a) Montrer que si $\sum R_n$ converge et que si $nR_n \rightarrow 0$ alors $\sum nu_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n. \quad \left(\text{Ind : calculer } \sum_{k=1}^n ku_k \right)$$

- b) Montrer que la série $\sum (-1)^n R_n$ est convergente.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

- a) Justifier l'existence de R_n et calculer $R_n - R_{n+1}$ et $R_n + R_{n+1}$ en déduire que :

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- b) Quelle est la nature de la série de terme général R_n ?

Exercice 7 : (Série puissance nième)

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et que la fonction : $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ soit intégrable sur $]0,1[$.

1. Soit $x \in]0,1[$ fixé. Montrer que la fonction : $t \mapsto f(x^t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} f(x^t) dt = -\frac{1}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.$$

2. Montrer que $\forall x \in]0,1[$, la série $\sum_{n \geq 0} f(x^n)$ converge. On note :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x^n).$$

3. En comparant avec une intégrale, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.$$

4. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\pi}{4(1-x)}.$$

Exercice 8 :

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que :

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \text{ si } a \neq b \text{ et } \frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a^n.$$

2. Dans chacun des cas suivants montrer que la famille est sommable et calculer sa somme.

(1) $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$, (2) $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ $q \in]0,1[$, (3) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{Z}^*}$, (4) $\left(\frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*}$.

(On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

3. Etudier la sommabilité des familles $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ et $(b_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$:

$$a_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^\alpha}, \quad b_{p,q} = \frac{1}{p^2 + q^2}.$$

Exercice 9 :

On pose :

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \text{ et } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Justifier la convergence et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1).$$

2. Montrer que pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{n^{k+1}}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

3. Montrer que $\mathcal{F}$ est bien définie sur $] -1, 1[$ et que :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k.$$

4. On admet que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\cotan(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}.$$

- a) Montrer que pour $|x| < \pi$:

$$\frac{x^2}{x^2 - \pi^2 n^2} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

- b) En déduire pour $|x| < \pi$, la relation :

$$x \cotan(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k}.$$

- c) En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Exercice 10 :

On pose pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^k}.$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $] -1, 1[$ et que pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n.$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

2. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 10 au voisinage de 0.

- Ex 1:

$$a) a/ U_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \forall n \geq 3$$

$$U_n \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 3} U_n \text{ c.v}$$

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} U_n$$

$$\frac{2x-1}{x(x^2-4)} = \frac{2x-1}{x(x+2)(x-2)}$$

DES

$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2}$$

$$a = \left[\frac{2x-1}{(x+2)(x-2)} \right]_{x=0} = \frac{1}{4}$$

$$b = \left[\frac{2x-1}{x(x-2)} \right]_{x=-2} = -\frac{5}{8}$$

$$c = \left[\frac{2x-1}{x(x+2)} \right]_{x=-2} = \frac{3}{8}$$

$$S = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n} - \frac{5}{8(n+2)} + \frac{3}{8(n-2)} \right)$$

⚠: interdit

de couper la somme:
(les séries sont divergentes)

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)} + \frac{3}{8(k-2)} \right)$$

→ changement de compteur ou bien télescopique

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{4k} + \sum_{k=5}^{n+2} \frac{-5}{8(k+2)} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{8(k-2)} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{4k} + \frac{-5}{8k} + \frac{3}{8k} \right) +$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{4n} + \frac{-5}{8(n-1)} + \frac{-5}{8n}$$

$$+ \frac{-5}{8(n+1)} + \frac{-5}{8(n+2)} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{24} + \frac{3}{32}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32}$$

$$= \frac{8+6+36+18+12+9}{96}$$

$$= \frac{89}{96}$$

$$b) U_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \geq 2$$

$$U_n \sim -\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} U_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{a_n} - \underbrace{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{a_{n+1}}$$

télescopique

$$\Rightarrow = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = -\ln(2)$$

$$c) U_n = \frac{a^{2n} \cdot \sin(n\theta)}{(1+a^2)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$a, \theta \in \mathbb{R}$

$$|U_n| \leq \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^n} = v_n = \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n \text{ avec:}$$

$$0 \leq \frac{a^2}{1+a^2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum v_n \text{ c.v} \Rightarrow \sum U_n \text{ abs c.v donc c.v}$$

$$\text{Rq: } U_n = \text{Im} \left(\frac{a^{2n} \cdot e^{in\theta}}{(1+a^2)^n} \right)$$

$$z_n = a_n + ib_n$$

$$z_n \text{ abs c.v} \Rightarrow \begin{cases} a_n \text{ c.v} \\ b_n \text{ c.v} \end{cases}$$

car: $0 \leq |a_n| \leq |z_n|$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n} \cdot e^{in\theta}}{(1+a^2)^n} \right)$$

$$= \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^2 \cdot e^{i\theta}}{1+a^2} \right)^n \right)$$

$$= \text{Im} \left(\frac{1}{1 - \frac{a^2 \cdot e^{i\theta}}{1+a^2}} \right)$$

$$= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{1+a^2} \cos \theta\right) - i \left(\frac{a^2 \sin \theta}{1+a^2}\right)} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{a^2 \sin \theta}{1+a^2}}{\left(1 - \frac{a^2 \cos \theta}{1+a^2}\right)^2 + \frac{a^4 \sin^2 \theta}{(1+a^2)^2}} \right)$$

d/ $U_n = \frac{(n^2 - 2) \cdot a^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 $a \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \underbrace{|a|}_{< 1} \cdot \frac{(n+1)^2 - 2}{n^2 - 2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n+1)}}_{\downarrow 0}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

D'Alembert $\Rightarrow \sum U_n$ abs c.v donc c.v

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2) \cdot \frac{a^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 \cdot a^n}{n!} - \left(\frac{2a^n}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \cdot a^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{série exp}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot a^n}{(n-1)!} - 2 \cdot e^a$$

$$= -2 \cdot e^a + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot \frac{a^{n+1}}{n!}$$

$$= -2 \cdot e^a + a \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n \cdot \frac{a^n}{n!} + \frac{a^n}{n!} \right)$$

$$= -2e^a + a \cdot e^a + a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-1)!}$$

$$= -2e^a + a \cdot e^a + a \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n!}$$

$$= -2e^a + a \cdot e^a + a^2 \cdot e^a$$

$$= (a^2 + a - 2) \cdot e^a$$

3) hyp: $\sum U_n$ et $\sum V_n$ c.v avec $U_n > 0$
 $\forall n: V_n > 0$

a/ $\sum \max(U_n, V_n)$ c.v ?

$0 \leq \max(U_n, V_n) \leq \frac{U_n + V_n}{t_n}$, car $U_n, V_n > 0$

$\sum U_n$ c.v et $\sum V_n$ c.v $\Rightarrow \sum t_n$ c.v

$\Rightarrow \sum \max(U_n, V_n)$ c.v

b/ $\sum \sqrt{U_n V_n}$ c.v ? $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

$0 \leq \sqrt{U_n V_n} \leq \frac{1}{2}(U_n + V_n)$
 $ab \leq \frac{1}{2}(a+b)^2$

$\sum t_n$ c.v $\Rightarrow \sum \sqrt{U_n V_n}$ c.v

c/ $\sum \frac{U_n V_n}{U_n + V_n}$ c.v ?

$0 \leq \frac{U_n V_n}{U_n + V_n} = \frac{U_n}{U_n + V_n} \cdot V_n \leq V_n$
 ≤ 1

$\sum V_n$ c.v $\Rightarrow \sum \frac{U_n V_n}{U_n + V_n}$ c.v

d/ $\sum U_n^\alpha \cdot V_n^{1-\alpha}$ c.v ? $\alpha \in [0, 1]$

$0 \leq U_n \leq U_n + V_n$
 $e^{\alpha \ln(U_n)} \cdot e^{(1-\alpha) \ln(V_n)}$

$\Rightarrow 0 \leq U_n^\alpha \leq (U_n + V_n)^\alpha$
 $e^{\alpha \ln(U_n) + (1-\alpha) \ln(V_n)}$

$0 \leq V_n \leq U_n + V_n$
 $e^{\alpha \ln(U_n) + (1-\alpha) \ln(V_n)}$

$\Rightarrow 0 \leq V_n^{1-\alpha} \leq (U_n + V_n)^{1-\alpha}$

Donc: $0 \leq U_n^\alpha \cdot V_n^{1-\alpha} \leq U_n + V_n = t_n$

$\sum t_n$ c.v $\Rightarrow \sum U_n^\alpha V_n^{1-\alpha}$ c.v

e/ $0 \leq \frac{\sqrt{U_n}}{n} = \frac{1}{n} \sqrt{U_n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + U_n \right) = t_n$

$\sum t_n$ c.v $\Rightarrow \sum \frac{\sqrt{U_n}}{n}$ c.v

$$3/ \sum U_n^a \text{ c.v. ?}$$

$$\sum U_n \text{ c.v.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \geq p, U_n \leq 1$$

$$\text{donc } \forall n \geq p, 0 \leq U_n^2 \leq U_n$$

$$\Rightarrow \sum U_n^2 \text{ c.v.}$$

$$8/ \sum \ln(1+U_n) \text{ c.v. ?}$$

$$\ln(1+U_n) \sim U_n \quad (U_n > 0)$$

$$\sum U_n \text{ c.v.} \Rightarrow \sum \ln(1+U_n) \text{ c.v.}$$

$$4/ \sum (1 - \cos(U_n)) \text{ c.v. ?}$$

$$1 - \cos U_n \sim \frac{1}{2} U_n^2 \text{ car: } (U_n \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \sum U_n^2 \text{ c.v.} \Rightarrow \sum (1 - \cos U_n) \text{ c.v.}$$

$$i/ \sum ((1+U_n)^\alpha - 1) \text{ c.v. ?}$$

$$(1+U_n)^\alpha - 1 \sim \alpha U_n \text{ (garde signe fixe)}$$

$$\sum \alpha U_n \text{ c.v.} \Rightarrow \sum ((1+U_n)^\alpha - 1) \text{ c.v.}$$

Exa :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} ; \quad \delta_n = H_n - \ln(n)$$

$$1/ H_n \sim \ln(n) \text{ (voir cours)}$$

$$2/ \delta_n - \delta_{n+1} = H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

$$3/ \delta_n - \delta_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2} (\geq 0)$$

$$\text{et } \sum \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \sum (\delta_n - \delta_{n+1}) \text{ c.v.}$$

$$\Rightarrow (\delta_n) \text{ c.v.}$$

$$\text{on note: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \gamma: \text{cte d'Euler}$$

$$4/ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n} \text{ (voir cours)}$$

$$\text{on a: } \delta_n - \delta_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$$

$$\sum \frac{1}{2n^2} \text{ a termes } \geq 0 \text{ et c.v. donc:}$$

$$\underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} (\delta_k - \delta_{k+1})}_{\delta_n - \gamma} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\delta_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{c.a.d: } \delta_n - \gamma = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$H_n - \ln(n) - \gamma = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$5/ \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ c.v. (CSSA)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\text{or: } \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_{2n+1} - H_n$$

$$\text{donc: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n+1} - H_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\delta_{2n+1} + \ln(2n+1) - \delta_n - \ln(n))$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\delta_{2n+1} - \delta_n + \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \right) = \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2)$$

$$6/ I = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt$$

$$f(t) = \frac{t - E(t)}{t^2} \text{ c.p.m sur } [1, +\infty[$$

$$E(t) \leq t < E(t) + 1$$

$$0 \leq t - E(t) \leq 1$$

$$0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2} : \text{intégrable sur } [1, +\infty[$$

$\Rightarrow f$ int sur $[1, +\infty[\Rightarrow I$ existe.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{t - E(t)}{t^2} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{t - E(t)}{t^2} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{t - n}{t^2} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{n}{t^2} \right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln t + \frac{n}{t} \right]_n^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) + \frac{n}{n+1} - \ln(n) - 1 \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k) - \frac{1}{k+1} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n) - 0 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 1 \right)$$

$$= 1 - \gamma$$

$$7/ \frac{\ln n}{n} \geq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

$$Hq: \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)_{n \geq 3} \text{ est } \downarrow ?$$

$$f(t) = \frac{\ln t}{t}$$

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \leq 0 \quad \forall t \in [e, +\infty[$$

$$\text{donc } \left(f_n = \frac{\ln(n)}{n} \right) \text{ est } \downarrow.$$

$$\text{C.S.S.A: } \sum (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} \text{ est c.v}$$

$$* \left| (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} \right| = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$n/ \frac{\ln(n)}{n} = \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$\Rightarrow \sum \frac{\ln(n)}{n} \text{ div } \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} \text{ n'est pas abs c.v.}$$

$$b/ v_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k}$$

$$= \sum_{k=2}^n f(k) \text{ avec: } f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$$

$$f \text{ continue et } \downarrow \text{ sur } [3, +\infty[$$

$$\forall k \geq 3, \forall t \in [k, k+1]:$$

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

$$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^n f(k+1) \leq \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=3}^n f(k)$$

$$\sum_{k=4}^{n+1} f(k) \leq \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) - f(2)$$

$$v_n - \frac{\ln 2}{2} \leq \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_3^{n+1} \leq v_n - \frac{\ln 2}{2}$$

$$\frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln(n+1)}{n+2} \leq v_n \leq \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

$$\frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2} (\ln 3)^2 \leq v_n \leq \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2} (\ln 3)^2$$

$$v_n \sim \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2$$

$$\Rightarrow v_n \sim \frac{1}{2} (\ln(n))^2$$

c/ (w_n) c.v ?

$$f(t) = \frac{\ln t}{t} \text{ continue } > 0$$

et $\downarrow$ sur $[3, +\infty[$

$$\Rightarrow \sum \left(f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt \right) \text{ c.v}$$

$$= \sum \left(\frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln(t)}{t} dt \right) \text{ c.v}$$

$$\text{donc: } S_n = \left(\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \int_{k-1}^k \frac{\ln(t)}{t} dt \right)$$

suite c.v

$$\text{or: } S_n = \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}}_{v_n} - \int_1^n \frac{\ln t}{t} dt$$

$$S_n = v_n - \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^n$$

$$\Rightarrow S_n = v_n - \frac{(\ln(n))^2}{2} = w_n$$

$\Rightarrow (w_n)$ suite c.v.

d/ $\forall n \geq 3$,

$$u_{2n} + v_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=2}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

$$= \sum_{k=2}^{2n} ((-1)^k + 1) \cdot \frac{\ln k}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n 2 \cdot \frac{\ln(2k)}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2)}{k} + \frac{\ln(k)}{k}$$

$$= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} v_n$$

$$= \ln(2) \cdot H_n + v_n$$

$$\Rightarrow u_{2n} = v_n - v_{2n} + \ln(2) \cdot H_n$$

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

$$v_n \sim a_n$$

$$w_n \sim a_n$$

$$u_n \sim a_n$$

$$\frac{F_1 + F_2}{n} \rightarrow F_1$$

bornée

$$* S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln(n)}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot \ln k}{k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - v_{2n} + \ln(2) \cdot H_n)$$

$$\text{or: } v_n = w_n + \frac{(\ln(n))^2}{2}; H_n = \delta_n + \ln(n)$$

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(w_n + \frac{1}{2} (\ln n)^2 - w_{2n} - \frac{1}{2} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{(\ln(2) + \ln n)^2}{2} + \ln(2) \cdot \delta_n + \ln(2) \cdot \ln(n) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{w_n - w_{2n}}_{=0} - \frac{1}{2} (\ln 2)^2 + \ln(2) \cdot \delta_n \right)$$

$$= \left(\delta - \frac{\ln(2)}{2} \right) \cdot \ln(2)$$

Ex 5: $z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$

$$u_n = \frac{z^n}{n^x}$$

$$1/ \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)^x} \cdot \frac{n^x}{z^n} \right| = |z| \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} \right)^x}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|}$$

D'Alembert

$$\Rightarrow * |z| < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ abs c.v} \Rightarrow \text{c.v}$$

$$* |z| > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ div. gross.}$$

$$* \text{pour } z=1: u_n = \frac{1}{n^x} \text{ donc } \sum u_n \text{ c.v}$$

ssi: $x > 1$

$$* z=-1: u_n = \frac{(-1)^n}{n^x}$$

$$\text{1er cas: } x > 0: \sum u_n \text{ c.v (c.s.s.i.A)}$$

$$\text{2ème cas: } x \leq 0: |u_n| = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & x=0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum u_n \text{ div. gross.}$$

$$\text{Donc pour } z=-1: \sum u_n \text{ c.v ssi } x > 0$$

$$a) z = e^{i\theta} \rightarrow |z| = 1$$

$$a) * x > 1:$$

$$|U_n| = \frac{1}{n^x} \Rightarrow \sum U_n \text{ abs c.v donc c.v}$$

$$* x \leq 0:$$

$$|U_n| = \frac{1}{n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum U_n \text{ div. gross.}$$

$$b) 0 < x \leq 1, |z| = 1 \text{ et } z \neq 1$$

$$z = e^{i\theta}, \theta \in]0, 2\pi[$$

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{k=1}^n z^k, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n z^k \right|, z \neq 1$$

$$= \left| z \cdot \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| = \left| \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{i(n+1)\theta/2} [e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}]}{e^{i\theta/2} [e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}]} \right| = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$= \left| \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$* \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k^x} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) + \frac{S_n}{n^x}$$

$$\text{Rq: } z^n = S_n - S_{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k^x} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k^x}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k^x} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^x} = 1 \text{ car } S_0 = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) + \frac{S_n}{n^x}$$

$$* S_n = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k^x}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) + \frac{S_n}{n^x}$$

$$\text{Mq } (S_n) \text{ c.v. :}$$

$$Y_n = \underbrace{S_n}_{\text{bornée}} \times \underbrace{\frac{1}{n^x}}_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x > 0$$

$$X_n = ?$$

$$\left| S_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \underbrace{\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}}_{t_n}$$

$$\left(\frac{1}{n^x} \right) \text{ suite c.v}$$

$$\Rightarrow \sum t_n \text{ c.v} \Rightarrow \sum S_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \text{ abs c.v} \Rightarrow \text{c.v}$$

$$\Rightarrow (X_n) \text{ suite c.v (somme partielle)}$$

$$\mathcal{U} = (S_n) \text{ est c.v} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

- Ex 6 :

$$1/ \sum U_n \text{ c.v } \Leftrightarrow \exists (V_n) \text{ c.v } / U_n = V_n - V_{n+1}$$

$$\Leftarrow (V_n) \text{ c.v } \Rightarrow \sum (V_n - V_{n+1}) \text{ c.v c.à.d.}$$

$$\Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

$$\Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k, (R_n) \text{ c.v et } U_n = R_{n-1} - R_n$$

$$\text{on pose: } V_n = R_{n-1} \text{ donc } (V_n) \text{ c.v}$$

$$\text{et } U_n = V_n - V_{n+1}$$

$$\text{Mq: } S_n = \sum_{k=0}^n U_k \text{ donc } (S_n) \text{ c.v}$$

$$U_n = S_n - S_{n+1} = \underbrace{(-S_{n+1})}_{V_n} - \underbrace{(-S_n)}_{V_{n+1}}$$

$$2/ \sum U_n \text{ c.v à termes } \geq 0.$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a/ \sum R_n \text{ c.v et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n R_n = 0$$

$$\ast \sum_{k=1}^n k U_k = \sum_{k=1}^n k (R_{k-1} - R_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n k R_{k-1} - k R_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \underbrace{k R_{k-1} - (k+1) R_k + R_k}_{\text{télescopique}}$$

$$= \sum_{k=1}^n R_k + R_0 - (n+1) R_n$$

$$= \sum_{k=0}^n R_k - (n+1) R_n \quad (1)$$

$$\ast \sum_{n \geq 0} R_n \text{ c.v } \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^n R_k \right) \text{ c.v}$$

$$\ast (n+1) R_n \sim n R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc: } \left(\sum_{k=1}^n k U_k \right) \text{ c.v c.à.d. } \sum n U_n \text{ c.v}$$

$$n \rightarrow +\infty, (1): \sum_{n=1}^{+\infty} n U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} n R_n = 0$$

$$\text{donc: } \sum_{n=1}^{+\infty} n U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$$

$$b/ U_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \geq \sum_{k=n+2}^{+\infty} U_k$$

$$\Rightarrow R_n \geq R_{n+1}$$

$$R_n \geq 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

$$\sum (-1)^n R_n \text{ c.v (C.S.S.A.)}$$

$$3/ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$a/ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ c.v (C.S.S.A.)}$$

$$\Rightarrow R_n \text{ existe } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\ast R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$\ast R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \quad \alpha_n$$

$$\ast \text{Mq: } \alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) ?$$

$$|n^2 \alpha_n| = \frac{n^2}{2} \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \right|$$

$$(C.S.S.A.) \ll \frac{n^2}{2} \times \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \right| \leq \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\leq \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (n^2 \alpha_n)$ est bornée donc :

$$\alpha_n = \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Q: $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b/ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$ c.v (c.s.s.t.)

$\sum \theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$ c.v car $\sum \frac{1}{n^2}$ c.v

Q: $\sum R_n$ c.v

Ex 3:

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (Fonction zeta de Riemann)

$\mu(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$

1/ $\zeta(s)$ existe ssi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ c.v
 $\Leftrightarrow s > 1$

donc: $D_\zeta =]1, +\infty[$

$\mu(s)$ existe ssi $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ c.v

1er cas: $s > 0$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ c.v (c.s.s.t.)

2ème cas: $s \leq 0$

$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \right| = \frac{1}{n^s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{ssi } s = 0 \\ +\infty & \text{ssi } s < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ div. gross.

Q: $D_\mu =]0, +\infty[$.

2/ $\forall s \in]1, +\infty[, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} h(t)$

avec: $h(t) = \frac{1}{t^s}, \forall t \in [1, +\infty[$

$h'(t) = -s \cdot t^{-s-1} < 0 \forall t \in [1, +\infty[$

$\Rightarrow h$ est $\downarrow$ sur $]1, +\infty[$ / h int sur $[1, +\infty[$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n, n+1[$:

$h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$

$h(n+1) \leq \int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} h(n+1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} h(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n)$

$\sum_{n=2}^{+\infty} h(n) \leq \int_1^{+\infty} h(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n)$

$\zeta(s) - h(1) \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s)$

$\zeta(s) - 1 \leq \left[\frac{1}{1-s} t^{1-s} \right]_1^{+\infty} \leq \zeta(s)$
 $= \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$
 $\forall s \in]1, +\infty[.$

* $\forall s > 1, \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}$

$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$
 $s \rightarrow 1^+ \downarrow \quad \quad \quad s \rightarrow 1^+ \downarrow$

$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1$

c.a.d: $\boxed{\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}}$

3/ à retenir: Δ

ssi $\sum u_n$ c.v tel que $\sum u_{2n}$ c.v

alors: $\sum u_{2n+1}$ c.v et on a:

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$

Première :

$$\sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_{2k}$$

$$\begin{aligned} 3/ \forall s > 1, \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{(2n)^s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) \Rightarrow \zeta(s) - \mu(s) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \frac{2}{2^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 2^{1-s} \zeta(s) \end{aligned}$$

$$\mu(s) = (1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s)$$

$$* \mu(1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \mu(s)$$

$$\mu(s) \underset{1^+}{\sim} \frac{(1 - 2^{1-s})}{s-1} = \frac{(1-s) \cdot \ln(2)}{s-1}$$

$$\underset{1^+}{\sim} \frac{-(1-s) \cdot \ln(2)}{s-1} = \ln(2)$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1^+} \mu(s) = \ln(2)$$

$$\Rightarrow \mu(1) = \ln(2)$$

$$4/ \forall s > 0, |\mu(s) - 1| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \right|$$

$$\leq \left| \frac{(-1)^3}{2^s} \right| \leq \frac{1}{2^s}$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^s} = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} (\mu(s) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} \mu(s) = 1$$

$$* \forall s > -1, \zeta(s) = \frac{1}{(1 - 2^{1-s})}$$

$$\xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\text{donc: } \lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$$

$$5/ \forall x \in]0, +\infty[,$$

$$2 \mu(x) = \mu(x) + \mu(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right]$$

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right]$$

$$6/ -1 + 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot w_n$$

$$\text{avec: } w_n = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

$$w_n \geq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

$$Mq(w_n) \text{ suite } \downarrow.$$

$$w_n = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} = h(n)$$

$$\text{avec: } h(t) = \frac{1}{t^x} - \frac{1}{(t+1)^x}$$

$$h'(t) = \frac{-x}{t^{x+1}} \left[\frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{(t+1)^{x+1}} \right] \leq 0$$

$$\Rightarrow h(t) \downarrow \Rightarrow (w_n) \text{ est } \downarrow$$

-Ex4:

a/ $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

c/ $\forall x > 0, \left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \geq 0} \searrow 0$ donc:

$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ c.v (c.s.s.A)

donc $\forall x > 0, \theta(x)$ existe.

b/ $\theta(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

c.s.s.A $\Rightarrow \theta(x) - \frac{1}{x}$ a m^{me} signe que son 1^{er} terme $\frac{-1}{1+x} \Rightarrow \theta(x) - \frac{1}{x} \leq 0$

$\Rightarrow \theta(x) \leq \frac{1}{x}$

c.s.s.A $\Rightarrow \left| \theta(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{-1}{1+x} \right| = \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \theta(x) \leq \frac{1}{1+x}$

$\left[\theta(x) \geq \frac{1}{x(x+1)} \right]$

Q: $\forall x > 0, \frac{1}{x(x+1)} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{x}$

c/ (b) $\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq x \theta(x) \leq 1$
 $\begin{matrix} x \rightarrow 0^+ & \downarrow & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \quad \begin{matrix} & & \downarrow x \rightarrow 0^+ \\ & & 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \theta(x) = 1$

c.a.d: $\left[\theta(x) \sim_{0^+} \frac{1}{x} \right]$

d/ soit $x, y \in]0, +\infty[/ x < y$

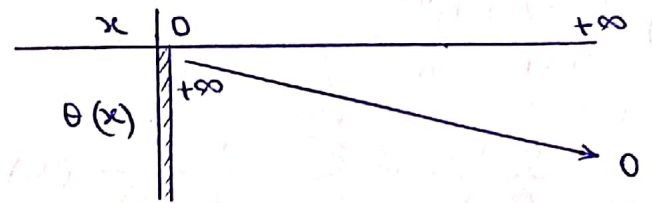
$\theta(x) - \theta(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y} \right)$
 $= (y-x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)} \quad (1)$
 $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$ vérifie c.s.s.A $S(x,y)$

$\Rightarrow S(x,y)$ a m^{me} signe que $\frac{1}{xy} > 0$

$\Rightarrow S(x,y) > 0 \quad (2)$

(1), (2) $\Rightarrow \theta(x) - \theta(y) > 0$
 $\Rightarrow \theta(x) > \theta(y)$

Q: θ est $\downarrow$ sur $]0, +\infty[$.



b/ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 0$

a) $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$

c/ $f(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ continue, ≥ 0 sur $]0, 1]$

alors $\varphi(x)$ existe m^{me}: f int sur $]0, 1]$

$f(t) \sim_{0^+} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ m^{me} $1-x < 1$
 $\Leftrightarrow x > 0$

Q: $D_\varphi =]0, +\infty[$.

b/ $x \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k \cdot t^{k+x-1} dt =$

$\sum_{k=0}^n \left[\frac{(-1)^k \cdot t^{k+x}}{k+x} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+x}$

$x \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k \cdot t^{k+x-1} dt =$

$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot t^{k+x-1} \right) dt =$

$\int_0^1 \left(t^{x-1} \cdot \sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt = \int_0^1 t^{x-1} \cdot \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{n+x}}{1+t} dt$

$= \varphi(x) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+x} = \theta(x)$$

$$|W_n| = \int_0^1 \frac{t^{n+x}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x} dt = \left[\frac{t^{n+x+1}}{n+x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+x+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$n \rightarrow +\infty, b \Rightarrow \theta(x) = \varphi(x) \quad \forall x > 0$$

$$d/ S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \theta(1) = \varphi(1)$$

$$\varphi(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 = \ln(2)$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \theta\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{-1/2}}{t+1} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt$$

$$\begin{aligned} \text{c.v} \Rightarrow u &= \sqrt{t} \\ t &= u^2 \\ dt &= 2u du \end{aligned}$$

$$S_2 = \int_0^1 \frac{1}{(u^2+1)u} du = \left[\arctan(u) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- Ex 7 :

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, continue, $\uparrow$, $f(0)=0$
et $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ int sur $]0,1[$.

$\forall x \in]0,1[$ fixé,

$$h(t) = f(x^t), \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

$$u \mapsto \frac{f(u)}{u} \text{ int sur }]0,1[$$

$$\text{on pose: } u = x^t = \varphi(t) \rightarrow t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow t \mapsto \frac{f(\varphi(t))}{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) \text{ int sur } [0, +\infty[$$

$$= \frac{f(x^t)}{x^t} \cdot \ln(x) \cdot x^t$$

$$= \ln(x) \cdot f(x^t)$$

donc: $t \mapsto f(x^t)$ int sur $[0, +\infty[$.

$$\times \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du \xrightarrow{\text{c.v } u=x^t \rightarrow t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}} \int_0^{+\infty} -\ln(x) \cdot f(x^t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(x^t)}{x^t} \cdot x^t \cdot \ln(x) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -\ln(x) \cdot f(x^t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x^t) dt = -\frac{1}{\ln(x)} \times \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$$

$$2/ \sum_{n \geq 0} f(x^n) = \sum_{n \geq 0} h(n) \text{ avec:}$$

$$\times h(t) = f(x^t), \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

$$= f(e^{t \ln(x)})$$

f continue et ≥ 0 car: $f \uparrow$ et $f(0)=0$

$\Rightarrow h$ continue et ≥ 0 sur $[0, +\infty[$

$\times$ soient $t_1, t_2 \in [0, +\infty[$ tq: $t_1 < t_2$

$$\Rightarrow t_1 \ln(x) > t_2 \ln(x)$$

$$\Rightarrow e^{t_1 \ln(x)} > e^{t_2 \ln(x)}$$

$$\Rightarrow x^{t_1} > x^{t_2} \text{ or } f \uparrow$$

$$\Rightarrow f(x^{t_1}) > f(x^{t_2})$$

$$\Rightarrow h(t_1) > h(t_2) \Rightarrow h \downarrow \text{ sur } [0, +\infty[$$

or: h est int sur $[0, +\infty[$ d'où:

$$\sum_{n \geq 0} f(x^n) \text{ c.v.}$$

$$\text{on note: } F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x^n)$$

$$3/ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n, n+1],$$

$$h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$$

$$h(n+1) \leq \int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h(n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} h(t) dt \leq F(x)$$

$$F(x) - h(0)$$

$$F(x) - h(0) \leq \int_0^{+\infty} h(t) dt \leq F(x)$$

$$\int_0^{+\infty} f(x^t) dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} f(x^t) dt + f(1)$$

$$-\frac{1}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du \leq F(x) \leq -\frac{1}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du + f(1)$$

$$\frac{x-1}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du \leq (1-x) \cdot F(x) \leq \frac{x-1}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du +$$

$$\downarrow x \rightarrow (1^-) \quad \downarrow x \rightarrow (1^-) \quad \downarrow x \rightarrow (1^-)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (1^-)} (1-x) \cdot F(x) = \int_0^1 f(u) du.$$

$$4/ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x^n)$$

$$\text{avec: } f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \forall t \in [0, 1[$$

$$f \text{ continue sur } [0, 1], f(0) = 0$$

$$f'(t) = \frac{(1+t^2) - 2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \geq 0$$

$$\forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow f \text{ est } \uparrow \text{ sur } [0, 1]$$

$$f \text{ int sur }]0, 1[.$$

$$\text{D'après 3/} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (1^-)} (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} =$$

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{x \rightarrow (1^-)}{\sim} \frac{\pi}{4(1-x)}.$$