

Exercice 1 : (Norme sur $\mathbb{R}^2$)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application $N_1 : (x, y) \mapsto \max\{|x|, |2x + y|\}$.

1. Montrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner la boule unité fermée correspondante.
2. Trouver des constantes strictement positives α et β telles que :

$$\alpha \cdot \| \cdot \|_1 \leq N_1 \leq \beta \cdot \| \cdot \|_1.$$

Exercice 2 : (Normes équivalentes et non équivalentes)

On note : $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}); f(0) = 0\}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty, \quad N_2(f) = \|f' - f\|_\infty, \quad N_3(f) = \|f'\|_1, \quad N_4(f) = |f'(0)| + \|f''\|_1.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que N_3 et N_4 sont deux normes non équivalentes. (Utiliser la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall x \in [0,1], f_n(x) = x^n$).
2. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E .
3. Etablir que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$. (Indication : $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a), \forall a, b \in [0,1]$).
4. Soit la fonction $g : x \mapsto e^{-x}f(x)$. Comparer $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$ puis $\|g'\|_\infty$ et $N_2(f)$.
5. En déduire que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
6. On pose :

$$\varphi(x) = x^2, \quad \varphi_n(x) = x^2 + \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)e^{-nx} + \frac{1}{n^2}, \quad x \in [0,1].$$

- a) Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge vers φ dans E pour la norme N_1 .
- b) Etudier la convergence la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans E pour la norme N_2 .

Exercice 3 : (Normes et produits scalaires)

1. Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on note : $\langle f|g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.
 - a) Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est produit scalaire sur E . On note N la norme associée.
 - b) Montrer que : $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.
 (On pourra remarquer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2: (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$).
 - c) N et $\| \cdot \|_\infty$ sont-elles équivalentes ? (Utiliser la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par :
 $\forall x \in [0,1], f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$).
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on note $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que $(A, B) \mapsto \langle A|B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur E . On note $\| \cdot \|_s$ la norme associée est appelée norme de Schoor.
 - b) Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $(\text{tr}(A))^2 = p \text{tr}({}^tAA)$.
 - c) Pour tout $A = (a_{ij}) \in E$, on définit la norme sur E par : $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{ij}|$
 Trouver deux constantes $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que :

$$\forall A \in E, \alpha \|A\|_\infty \leq \|A\|_s \leq \beta \|A\|_\infty.$$

Exercice 4 : (Application dérivation et forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$)

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ des normes N et N_∞ :

$$\forall P \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|, \quad N_\infty(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que l'application $\mathcal{D} : P \mapsto P'$ est continue sur E pour N et discontinue pour N_∞ . (Utiliser $P_n(X) = X^n$).
2. Soit la forme linéaire $\mathcal{F}_\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathcal{F}_\alpha(P) = P(\alpha)$. On munit E de la norme N_∞ .
 - a) Montrer que $\mathcal{F}_\alpha$ est continue sur E si et seulement si $|\alpha| \leq 1$. (Utiliser $P_n(X) = X^n$).
 - b) Montrer que $\{P \in E, P(1) \neq 0\}$ est un ouvert mais $\{P \in E, P(2) \neq 0\}$ n'est pas un ouvert. (Utiliser $Q_n(X) = 2^{-n}X^n - 1$).

Exercice 5 : (Endomorphisme continu)

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles f de classe C^1 sur $[0, \pi]$, telles que $f(0) = 0$.

Pour tout $f \in E$, on définit sur $[0, \pi]$ la fonction :

$$U(f)(x) = f(1) \sin x + x \int_0^x (\cos t) f(t) dt.$$

Pour tout $f \in E$, on pose : $N(f) = \|f'\|_\infty$

1. Montrer que N est une norme sur E et que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \pi N(f)$. (On pourra remarquer que $\forall x \in [0, \pi], f(x) = \int_0^x f'(t) dt$).
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes. (Utiliser $f_n(t) = \sin(nt)$).
3. Montrer que U est un endomorphisme continu sur E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. U est-il continu sur E pour la norme N ?

Exercice 6 : (Distance et diamètre)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e-v-n et A une partie non vide de E .

1. Montrer que : $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.
2. Montrer que : $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.
3. Soient A, B deux fermés de E non vides et disjoints. On pose $\forall x \in E$:

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

- a) Montrer que f est bien définie et continue sur E . Calculer $f(x)$ pour $x \in A$ puis pour $x \in B$.
 - b) Montrer que $O_1 = \{x \in E; f(x) < 1/2\}$ et $O_2 = \{x \in E; f(x) > 1/2\}$ sont deux ouverts disjoints tels que $A \subset O_1$ et $B \subset O_2$.
4. Soit A une partie non vide et bornée de E . On appelle diamètre de A le réel positif :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

- a) Prouver que $\bar{A}$ est bornée et que $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.
 - b) Déterminer le diamètre de la partie $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$.
5. On note : $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose :

$$F = \left\{ f \in E; \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \text{ et } f(0) = 0 \right\}.$$

- a) Montrer que F est un fermé de E et que $d(0, F) \geq 1$.
- b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 1 + 1/n & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in F$ et calculer $\|f_n\|_\infty$. En déduire que : $d(0, F) = 1$.

Exercice 7 : (Opérateur de Volterra)

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles f de classe C^∞ sur $[0,1]$, telles que $f(0) = f(1) = 0$, muni des normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit K un noyau de Volterra définie sur le carré $C = [0,1] \times [0,1]$ par la relation :

$$K(x, t) = \begin{cases} (1-t)x & \text{si } x \leq t \\ t(1-x) & \text{si } x \geq t \end{cases}$$

Pour tout $f \in E$, on définit sur $[0,1]$ la fonction :

$$U(f)(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt.$$

1. On pose : $f_n(x) = x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})$ $x \in [0,1]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$.
3. Calculer les intégrales ci-dessous :

$$\int_0^1 K(x, t) dt, \quad \int_0^1 (K(x, t))^2 dt.$$

4. On fixe t dans $]0,1[$ et on pose pour tout $x \in [0,1]$, $K_t(x) = K(x, t)$. Montrer que : $\|K_t\|_\infty = t(1-t)$.
5. Montrer que K atteint son maximum et son minimum sur C et les calculer.
6. Montrer que U est endomorphisme continu de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ puis de $(E, \|\cdot\|_2)$.

Exercice 8 : (Topologie classique)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] ; P \text{ est constant}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \exp(xy - z) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Prouver que son graphe est un fermé de $\mathbb{R}^2$. (La réciproque est-elle vraie ?)
4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'ensemble $A = \{f \in E, \left| \int_0^1 f(t) dt \right| < 1\}$ Montrer que A est ouvert convexe de E . Déterminer son adhérence et sa frontière.
5. Etablir que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / e^x < y\}$ est une partie ouverte et convexe de $\mathbb{R}^2$. Déterminer son adhérence et sa frontière. Représenter graphiquement la frontière de B .
6. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E .
 - a) Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E alors son adhérence $\bar{A}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .
 - b) On suppose que A est non vide. Soit $f: E \rightarrow E$ une application continue. Montrer que si f est bornée sur A alors elle est bornée sur $\bar{A}$ et que : $\sup_{x \in A} \|f(x)\| = \sup_{x \in \bar{A}} \|f(x)\|$.
 - c) Montrer que $F_r(A)$ est un fermé de E et que $F_r(A) = \emptyset$ si et seulement si $A = \bar{E}$ ou $A = \emptyset$.
 - d) Montrer que A une partie fermée de E si et seulement si $F_r(A) \subset A$.
 - e) Montrer que A une partie ouverte de E si et seulement si $A \cap F_r(A) = \emptyset$.

Exercice 9 : (Compact et connexité par arcs)

1. Soit K et L deux compacts d'un evn E . Montrer que $K+L = \{x+y / x \in K, y \in L\}$ est un compact de E .

2. Soit F un fermé et K un compact. Montrer que $F + K = \{x + y / x \in F, y \in K\}$ est fermé.
3. Montrer que si F est fermé et K est compact de E alors $F \cap K$ est un compact.
4. On munit $\mathbb{R}^4$ de la norme $\|\cdot\|_2$. On pose
 $K = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \text{ et } x_3^2 + x_4^2 \leq 4\}$
 - a) Montrer que K est un compact et convexe de $\mathbb{R}^4$.
 - b) Montrer que l'application $f: x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - 1)x_3 + (x_2 - 1)x_4$ atteint ses bornes sur K et que: $\forall x \in K, |f(x)| \leq 2$.
 - c) En déduire que $f(K) = [-2, 2]$.
5. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et on souhaite établir que f' s'annule.
 - a) Etablir que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$ est une partie ouverte et connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
 - b) On note $\delta: A \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x, y) = f(y) - f(x)$. Etablir que $0 \in \delta(A)$.
 - c) Conclure en exploitant le théorème de Rolle.
6. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } (z - 1)^2 \leq 4\}$.
 - a) Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Déterminer son intérieur et sa frontière. Représenter graphiquement la frontière de K .
7. Montrer que $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x, x \geq 0, x + y \leq 1\}$ est un compact connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'intérieure et la frontière de K . Représenter graphiquement la frontière de K .

Exercice 10 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A une partie fermée non vide de E et $f: A \rightarrow A$ une application. Soit (x_n) la suite définie par : $\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On note : $B = \{x \in A; f(x) = x\}$.

1. On suppose que f est continue sur A .
 - a) Montrer que si (x_n) est convergente vers a alors $a \in A$.
 - b) Montrer que B est un fermé de E .
 - c) Montrer que si A est un compact de E alors B est un compact de E .
2. On suppose que A est un compact de E et que f est lipchitzienne de rapport $k \in]0, 1[$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$.
 - b) Montrer qu'il existe $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) qui converge vers $a \in A$ et que $(x_{\varphi(n)+1})$ converge vers a .
 - c) Montrer que f est uniformément continue sur A , que $a \in B$ puis que $B = \{a\}$.
3. On suppose que A est un compact de E et que :

$$\forall (x, y) \in A^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$
 - a) On pose $g(x) = \|f(x) - x\|$. Montrer qu'il existe $b \in A$ tel que :

$$g(b) = \min_{x \in A} g(x).$$
 - b) Montrer que $f(b) = b$ et que $B = \{b\}$.
 - c) Montrer que la suite $(u_n(b))$ définie par $u_n(b) = \|x_n - b\|$ est convergente.
 - d) Montrer que la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $a \in A$.
 - e) Montrer que $\|a - b\| = \|f(a) - b\|$ en déduire que $b = a$.
 - f) Montrer alors que la suite (x_n) est convergente et donner sa limite.

$$E_{\text{ex}} = E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$$

$$1/ E \subset C([0,1], \mathbb{R}) \text{ e.v. sur } \mathbb{R}$$

$$\text{mq } E \text{ s.e.v. de } C([0,1], \mathbb{R})?$$

$$* \tilde{0} \in E$$

$$* \text{ soient } f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R} \text{ la fct}$$

$$h = \lambda f + g \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]$$

$$\text{et } h(0) = 0 \Rightarrow h \in E.$$

$$Q = E \text{ est un e.v. sur } \mathbb{R}.$$

$$* \text{ Rappel: } \forall f \in C([0,1], \mathbb{R}),$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$\forall f \in E, N_1(f) = \|f'\|_{\infty}$$

$$N_2(f) = \|f' - f\|_{\infty}$$

$$N_3(f) = \|f'\|_1$$

$$N_4(f) = |f'(0)| + \|f''\|_1$$

$$* N_3 \text{ norme sur } E?$$

$$N_3(f) = 0 \Leftrightarrow \|f'\|_1 = 0 \Leftrightarrow f' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = c, \forall t \in [0,1]$$

$$\text{or } f(0) = 0 \Rightarrow \underline{f=0}$$

$$N_3(\lambda f) = \|\lambda f'\|_1 = |\lambda| \cdot \|f'\|_1 = |\lambda| N_3(f)$$

$$N_3(f+g) = \|f'+g'\|_1 \leq \|f'\|_1 + \|g'\|_1 \leq N_3(f) + N_3(g)$$

$$* N_4 \text{ norme sur } E?$$

$$N_4(f) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(t) = at + b \end{cases} \forall t \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow a = -f'(0) = 0 \Rightarrow f(t) = b$$

$$\text{or } f(0) = 0 = b \Rightarrow \underline{f=0}$$

$$N_4(\lambda f) = |\lambda f'(0)| + \|\lambda f''\|_1$$

$$= |\lambda| \cdot (|f'(0)| + \|f''\|_1) = |\lambda| N_4(f)$$

$$N_4(f+g) = |f'(0) + g'(0)| + \|f'' + g''\|_1$$

$$\leq |f'(0)| + |g'(0)| + \|f''\|_1 + \|g''\|_1$$

$$\leq N_4(f) + N_4(g) \quad f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$* f_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1], f_n'(x) = nx^{n-1}$$

$$N_3(f_n) = \|f_n'\|_1 = \int_0^1 |f_n'(t)| dt$$

$$= \int_0^1 f_n'(t) dt = [f_n(t)]_0^1 = f_n(1) - f_n(0) = 1$$

$$N_4(f_n) = |f_n'(0)| + \int_0^1 |f_n''(t)| dt = \int_0^1 f_n''(t) dt = [f_n'(t)]_0^1 = f_n'(1) - f_n'(0) = n$$

$$\frac{N_4(f_n)}{N_3(f_n)} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \text{ donc: } \underline{N_3 \not\sim N_4}.$$

$$a) * N_1 \text{ norme sur } E?$$

$$N_1(f) = 0 \Leftrightarrow \|f'\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow f' = 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = c \forall t \in [0,1] \text{ or } f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{f=0}$$

$$N_1(\lambda f) = \|\lambda f'\|_{\infty} = |\lambda| \|f'\|_{\infty} = |\lambda| N_1(f)$$

$$N_1(f+g) = \|f'+g'\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} \leq N_1(f) + N_1(g)$$

$$* N_2 \text{ norme sur } E?$$

$$N_2(f) = 0 \Leftrightarrow \|f' - f\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow f' - f = 0$$

$$\Delta: (E): y' = y \Rightarrow y = c \cdot e^x$$

$$f' - f = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} / f = c \cdot e^{1/t}$$

$$f = c \cdot e^t / \forall t \in [0, 1] ; c = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f=0}$$

$$N_2(f) = \|f' - f\|_\infty = \|f' - f\|_\infty = \|f'\|_\infty = \|f'\|_\infty \cdot N_2(f)$$

$$N_2(f+g) = \|(f+g)' - (f+g)\|_\infty$$

$$= \|f' - f + g' - g\|_\infty$$

$$\leq \|f' - f\|_\infty + \|g' - g\|_\infty$$

$$\leq N_2(f) + N_2(g)$$

$$3) \forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$$

$$\text{indication: } f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \underbrace{f(0)}_0 + \int_0^x f'(t) dt$$

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^x |f'(t)| dt$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|f'(t)|}_{\leq \|f'\|_\infty} dt$$

$$\leq \int_0^1 \|f'\|_\infty dt = \|f'\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \leq \|f'\|_\infty$$

$$\text{c.a.d: } \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$$

$$4/ g: x \mapsto e^{-x} f(x)$$

$$f(x) = e^x g(x)$$

$$|f(x)| = e^x |g(x)|$$

$$\leq e \cdot \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \leq e \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq e \cdot \|g\|_\infty \quad (2)$$

$$* g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x))$$

$$|g'(x)| = \underbrace{e^{-x}}_{\leq 1} \underbrace{|f'(x) - f(x)|}_{\leq N_2(f)} \leq N_2(f)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |g'(x)| \leq N_2(f)$$

$$\Rightarrow \|g'\|_\infty \leq N_2(f) \quad (2)$$

$$5/ * N_2(f) = \|f' - f\|_\infty$$

$$\leq \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} 2 \|f'\|_\infty$$

$$* N_1(f) = \|f'\|_\infty = \|(f' - f) + f\|_\infty$$

$$\leq \underbrace{\|f' - f\|_\infty}_{N_2(f)} + \|f\|_\infty$$

$$\leq N_2(f) + \|f\|_\infty$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} N_2(f) + e \|g\|_\infty$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} N_2(f) + e \|g'\|_\infty$$

$$\stackrel{(2)}{\leq} N_2(f) + e N_2(f)$$

$$\leq (1+e) \cdot N_2(f)$$

$$\underline{Q} = \forall f \in E,$$

$$\frac{1}{e} N_2(f) \leq N_1(f) \leq (1+e) N_2(f)$$

$$\underline{Q} = \underline{N_1 \sim N_2} \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$6) a/ \varphi_n(x) = x^2 + \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{n^2}\right) e^{-nx} + \frac{1}{n^2}$$

$$\varphi(x) = x^2$$

$$\text{Rq: } \forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n \in E, \varphi \in E$$

mq: (φ_n) c.v vers φ dans (E, N)

$$N_1(\varphi_n - \varphi) = \|\varphi_n - \varphi\|_\infty$$

$$= \sup_{x \in [0,1]} |\varphi_n'(x) - \varphi'(x)|$$

$$\forall x \in [0,1], \varphi_n'(x) - \varphi'(x) =$$

$$2x + \frac{1}{n} e^{-nx} + \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{n}\right) - n e^{-nx} - 2x =$$

$$e^{-nx} \left(\frac{2}{n} - x \right) = h(x)$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |h(x)| = ?$$

$$h'(x) = -n e^{-nx} \left(\frac{2}{n} - x \right) - e^{-nx}$$

$$= (nx - 3) \cdot e^{-nx}$$

$\forall n \geq 4$:

x	0	$\frac{2}{n}$	1
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\frac{2}{n} > 0$	$-\frac{1}{ne^3} < 0$	$(\frac{2}{n} - 1)e^{-n} < 0$

$$\Rightarrow \|h\|_\infty = \frac{2}{n}$$

$$\text{c.a.d: } N_1(\varphi_n - \varphi) = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\varphi =$ la suite (φ_n) c.v vers φ pour la norme N_1 .

$$b/ N_1 \sim N_2 \Rightarrow (\varphi_n) \text{ c.v vers } \varphi \text{ pour } N_2.$$

-Ex3:

$$1/ E = C^1([0,1], \mathbb{R}), \forall f, g \in E.$$

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

$$a/ \langle f, \lambda g_1 + g_2 \rangle = f(0) \cdot (\lambda g_1(0) + g_2(0)) +$$

$$\int_0^1 f'(t) \cdot (\lambda g_1'(t) + g_2'(t)) dt$$

$$= \lambda \left[f(0)g_1(0) + \int_0^1 f'(t)g_1'(t) dt \right] +$$

$$-f(0) + g_2(0) + \int_0^1 f'(t)g_2'(t) dt$$

$$= \lambda \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \text{ évident}$$

$$\langle f, f \rangle = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0 \end{cases}$$

continue et ≥ 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(t) = 0 \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = c \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f = 0.$$

$\mathcal{Q} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

$$\forall f \in E, N(f) = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$= \sqrt{(f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}$$

norme sur E .

$$b/ \text{ soit } f \in E. \text{ mq } \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)?$$

$$\text{Rappel: } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\text{indication: } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\forall x \in [0,1], f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

$$(f(x))^2 = \left(f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right)^2$$

$$\leq 2 \left[(f(0))^2 + \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2 \right]$$

$$\text{Rappel: } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ produit scalaire sur } E$$

$$\forall x, y \in E$$

$$\langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

avec $\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}$ (égalité) x et y sont colinéaires

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)$$

$$\Rightarrow (f(x))^2 \leq 2 \left[(f(0))^2 + \int_0^x 1^2 dt \right] \cdot \left[\int_0^x (f'(t))^2 dt \right]$$

$$\leq 2 \left[(f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right]$$

$$\leq 2(N(f))^2$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1],$$

$$|f(x)| \leq \sqrt{2} N(f)$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f).$$

$$c/ f_n(x) = x^n, \forall x \in [0, 1], f'_n(x) = nx^{n-1}$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1$$

$$N(f_n) = \sqrt{(f_n(0))^2 + \int_0^1 (f'_n(t))^2 dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2}{2n-1}}$$

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|} = \sqrt{\frac{n^2}{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc: } N \sim \|\cdot\|_\infty$$

$$2/ E = M_p(\mathbb{R})$$

$$a/ \forall A, B \in E, \langle A, B \rangle = \text{tr}(t_{AB})$$

$$\langle A, \lambda B_1 + B_2 \rangle = \text{tr}(t_{A(\lambda B_1 + B_2)})$$

$$= \text{tr}(t_{\lambda AB_1} + t_{AB_2}) = \lambda \text{tr}(t_{AB_1}) + \text{tr}(t_{AB_2}) = \lambda \langle A, B_1 \rangle + \langle A, B_2 \rangle$$

(tr: linéaire)

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(t_{AB}) = \text{tr}(t(t_{AB})) = \text{tr}(t_{BA}) = \langle B, A \rangle$$

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(t_{AA}) \geq 0?$$

$$\text{soit } A = (a_{ij}) \in M_p(\mathbb{R}) : t_A = (b_{ij}) \in E$$

$$\text{avec: } b_{ij} = a_{ji}$$

$$t_{AA} = c_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ki} a_{kj}$$

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^p (a_{ki})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle A, A \rangle = \text{tr}(t_{AA}) = \sum_{i=1}^p c_{ii} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p (a_{ki})^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq p} (a_{ij})^2 \geq 0.$$

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq p} (a_{ij})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq p$$

$$\Leftrightarrow A = 0$$

$$\|A\|_S =$$

$$\forall A = (a_{ij}) \in E, \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}^2}$$

$$b/ (t_{tr(A)})^2 = p \text{tr}(t_{AA})$$

$$\Leftrightarrow (\langle I, A \rangle)^2 = \text{tr}(I) \langle A, A \rangle$$

$$\Leftrightarrow (\langle I, A \rangle)^2 = \langle I, I \rangle \langle A, A \rangle$$

$$\Leftrightarrow |\langle I, A \rangle| = \sqrt{\langle I, I \rangle} \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

$$\Leftrightarrow I \text{ et } A \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow A = \lambda I / \lambda \in \mathbb{R}$$

$\|A\|_S = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq p} (a_{ij})^2}$
 $\exists i_0, j_0 \in \{1, \dots, p\} \text{ tq } \|A\|_\infty = |a_{i_0 j_0}|$
 $\|A\|_\infty^2 = a_{i_0 j_0}^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}^2 = \|A\|_S^2$
 $\leq \sum_{1 \leq i, j \leq p} \|A\|_\infty^2 = p^2 \|A\|_\infty^2$

$\|A\|_\infty \leq \|A\|_S \leq p \|A\|_\infty$

Ex 6: $(E, \|\cdot\|)$ K.e.v.n, $A \subseteq E, A \neq \emptyset$

Rappel = $\begin{cases} d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| \\ d(x, \bar{A}) = \inf_{a \in \bar{A}} \|x - a\| \end{cases}$

1/ $d(x, A) = 0$ ssi $x \in \bar{A}$?

"hyp: $d(x, A) = 0$.

$\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$

$\Rightarrow \exists (a_n)$ suite de A tq:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_n\| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

" $x \in \bar{A}$: $\exists (a_n)$ suite de A tq:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$

$0 \leq d(x, A) \leq \|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow d(x, A) = 0$

$\text{a/ } A \subset \bar{A} \Rightarrow \left(\inf_{a \in A} \|x - a\| \leq \inf_{a \in \bar{A}} \|x - a\| \right)$

$d(x, \bar{A}) = \inf \{ \|x - a\| / a \in \bar{A} \}$

$\xrightarrow{ACA} d(x, \bar{A}) \leq \|x - a\|, \forall a \in A$

$\Rightarrow d(x, \bar{A}) \leq \inf \{ \|x - a\| / a \in A \} = d(x, A)$ ①

* soit $a \in \bar{A}$, $\exists (a_n)$ suite $a \leq a, \forall a \in A$

de A tq: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ $d(x, A) \leq \|x - a\|$

on sait que:

$d(x, A) \leq \|x - a_n\|, \forall n \in \mathbb{N}$

$n \rightarrow +\infty$:

$d(x, A) \leq \|x - a\|, \forall a \in \bar{A}$

$\Rightarrow d(x, A) \leq \inf \{ \|x - a\| / a \in \bar{A} \} = d(x, \bar{A})$ ②

Q =

$(1), (2) \Rightarrow d(x, A) = d(x, \bar{A})$

3) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$: A, B 2 fermés de E.

$A \cap B = \emptyset, \forall x \in E$:

$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$

$\text{a/ } f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$

$* d(x, A) + d(x, B) = 0$

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} d(x, A) = 0 \\ d(x, B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bar{A} = A \\ x \in \bar{B} = B \end{cases} \text{ (fermé)}$

($\Rightarrow$) $x \in A \cap B = \emptyset$ impossible

donc $\forall x \in E, d(x, A) + d(x, B) > 0$

$\Rightarrow f$ est bien définie sur E.

$* h(x) = d(x, A) + d(x, B) > 0 \forall x \in E$

$\begin{matrix} x \mapsto d(x, A) \\ x \mapsto h(x) \end{matrix} \text{ continues sur E avec } h(x) \neq 0, \forall x \in E$

$\Rightarrow f$ est continue sur E .

* $\forall x \in A, d(x, A) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

* $\forall x \in B, f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A)} = 1.$
 $d(x, B) = 0$

b/ $\theta_1 = \{x \in E / f(x) < \frac{1}{2}\}$

$\theta_2 = \{x \in E / f(x) > \frac{1}{2}\}$

$\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$: évident

* $\theta_1 = \{x \in E / f(x) \in]-\infty, \frac{1}{2}[\}$
 $= f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$

* $\theta_2 = f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$

$]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue
 $\Rightarrow \theta_1$ et θ_2 des ouverts de E .

* $\forall x \in A, f(x) = 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \theta_1$
 $\Rightarrow \underline{A \subset \theta_1}$

* $\forall x \in B, f(x) = 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \theta_2$
 $\Rightarrow \underline{B \subset \theta_2}$

$\forall A \neq \emptyset, A$ bornée de E

$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$: diamètre de A

a/ * A bornée $(\Leftrightarrow) \exists M > 0$ tq $\forall x \in A$

$\|x\| \leq M$ ①

soit $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (a_n)$ suite de A tq :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$

$\forall n, a_n \in A \xrightarrow{(1)} \|a_n\| \leq M$

$n \rightarrow +\infty : \|x\| \leq M$ car $\forall x \in \bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A}$ est bornée.

* mq: $\delta(A) = \delta(\bar{A})$?

$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\| ; \delta(\bar{A}) = \sup_{x, y \in \bar{A}} \|x - y\|$

$A \subset \bar{A} \Rightarrow \sup_{x, y \in A} \|x - y\| \leq \sup_{x, y \in \bar{A}} \|x - y\|$

$\Rightarrow \underline{\delta(A) \leq \delta(\bar{A})}$ ①

$\forall$ soient $x, y \in \bar{A}$,

$\exists (x_n)$ suite de A tq: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$

$\exists (y_n)$ suite de A tq: $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$

$\forall n, \|x_n - y_n\| \leq \delta(A)$

$n \rightarrow +\infty : \|x - y\| \leq \delta(A)$ car $\forall x, y \in \bar{A}$

$\Rightarrow \sup_{x, y \in \bar{A}} \|x - y\| \leq \delta(A)$

$\Rightarrow \underline{\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)}$ ②

$\underline{\text{Q.E.D.}} = (1), (2) \Rightarrow \delta(A) = \delta(\bar{A})$.

b/ $E = \mathbb{R}, A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\}$.

$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} |x - y| = ?$

$A = \{x \in \mathbb{Q} / |x| < \sqrt{2}\}$

$= \mathbb{Q} \cap]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. longueur de l'intervalle:

$A \subset]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\Rightarrow \delta(A) \leq \delta(]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[) = 2\sqrt{2}$

donc: $\underline{\delta(A) \leq 2\sqrt{2}}$ ③

$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$

tq: $\sqrt{2} - \frac{1}{n} < a_n < \sqrt{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists b_n \in \mathbb{Q}$ tq: $-\sqrt{2} < b_n < -\sqrt{2} + \frac{1}{n}$

$(a_n), (b_n)$ deux suites de A .

$|a_n - b_n| \leq \delta(A)$

$n \rightarrow +\infty : |\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| \leq \delta(A) \Rightarrow \underline{2\sqrt{2} \leq \delta(A)}$ ④

1/ Rq: $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \bar{A} = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$$

$$\delta(A) = \delta(\bar{A}) = \delta([- \sqrt{a}, \sqrt{a}]) = a\sqrt{a}.$$

$$5/ E = C([0, 1], \mathbb{R}), \forall f \in E, \|f\|_\infty =$$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

on pose:

$$F = \left\{ f \in E / \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \text{ et } f(0) = 0 \right\}$$

$$a/ F = A \cap B \text{ avec:}$$

$$A = \left\{ f \in E / \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

$$B = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \right\}$$

$$\varphi: E \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \mathbb{R} \xleftarrow{1,1}$$

$$f \mapsto \varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{est une forme linéaire sur } E.$$

$$\forall f \in E,$$

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty$$

$$|\varphi(f)| \leq 1 \cdot \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ est continue sur } E.$$

$$\Rightarrow A = \varphi^{-1}([1, +\infty[) \Rightarrow A \text{ fermé de } E.$$

$$\|\cdot\|_\infty \text{ continue} \quad \text{fermé de } \mathbb{R}$$

$$\psi: E \xrightarrow{1,1} \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \psi(f) = f(0) \quad \text{est une forme linéaire.}$$

$$|\psi(f)| = |f(0)| \leq 1 \cdot \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \psi \text{ est continue sur } E.$$

$$\Rightarrow B = \psi^{-1}(\{0\}) \Rightarrow B \text{ fermé de } E$$

$$\{f \in E / \psi(f) = 0\} = \text{Ker } \psi$$

$$d/ F = A \cap B \Rightarrow F \text{ est fermé de } E.$$

$$* d(0, F) = \inf_{f \in F} \|0 - f\|_\infty$$

$$= \inf_{f \in F} \|f\|_\infty$$

$$1 \leq \|f\|_\infty?$$

$$\forall f \in F,$$

$$1 \leq \int_0^1 \underbrace{f(t)}_{\|f\|_\infty} dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$$

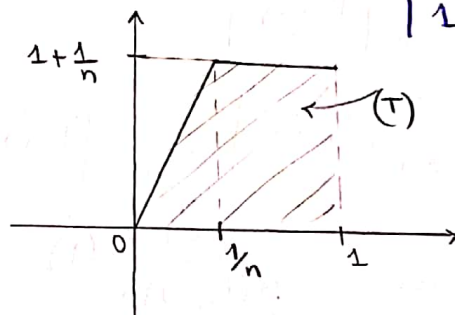
$$1 \leq \|f\|_\infty, \forall f \in F$$

$$\Rightarrow 1 \leq d(0, F).$$

$$5/ E = (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

$$F = \left\{ f \in E / \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \text{ et } f(0) = 0 \right\}$$

$$b/ \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \text{ continue sur } [0, 1]$$

$$\Rightarrow f_n \in E.$$

$$* f_n(0) = 0$$

$$\begin{aligned} * \int_0^1 f_n(t) dt &= \text{aire}(T) = \frac{[1 + (1 - \frac{1}{n})](1 + \frac{1}{n})}{2} \\ &= \frac{(1 + \frac{1}{n}) + (1 - \frac{1}{n})}{2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{2} \\ &= 1 + \left(\frac{n-1}{2n} \right) \geq 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q} = \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in F.$$

$$* \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1 + \frac{1}{n}$$

$$* 1 \leq d(0, F) = \inf_{f \in F} \|f\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow d(0, F) = 1$$

$$- \underline{Ex 4} : E = \mathbb{R}[X]$$

$$\forall P \in E, N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$$

$$N_{\infty}(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$$

$$\text{Rq: si } P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d \in E$$

$$\text{alors } \forall k \geq d+1$$

$$\Rightarrow P^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow N(P) = \sum_{k=0}^d |P^{(k)}(0)| \text{ existe dans } \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \text{1/ } D: E \xrightarrow{N} E \xleftarrow{N} \\ P \mapsto D(P) = P' \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{endomorphisme} \\ \text{de } E \\ \text{(linéaire)} \end{array}$$

$$\forall P \in E, N(D(P)) = N(P')$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k+1)}(0)|$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$$

$$\underline{Q} : D \text{ est continue sur } (E, N) \xrightarrow{1 \times N(P)}$$

$$\times P_n = x^n, D(P_n) = P'_n = n x^{n-1}$$

$$N_{\infty}(P_n) = \sup_{t \in [-1, 1]} |t^n| = 1$$

$$N_{\infty}(D(P_n)) = \sup_{t \in [-1, 1]} |n t^{n-1}| = n$$

$$\frac{N_{\infty}(D(P_n))}{N_{\infty}(P_n)} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow D \text{ n'est pas continue par } N_{\infty}.$$

$$2) E = \mathbb{R}[X], \text{ muni de } N_{\infty}.$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha}: E &\xrightarrow{N_{\infty}} \mathbb{R} \\ P &\mapsto F_{\alpha}(P) = P(\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{a/ } 1^{\text{er}} \text{ cas: } |\alpha| \leq 1 \text{ mq } F_{\alpha} \text{ continue?}$$

$$\forall P \in E, |F_{\alpha}(P)| = |P(\alpha)| \leq N_{\infty}(P)$$

$$\text{car: } \alpha \in [-1, 1]$$

$$\underline{Q} : F_{\alpha} \text{ est continue.}$$

$$\times 2^{\text{ème}} \text{ cas: } |\alpha| \geq 1.$$

$$P_n = x^n$$

$$N_{\infty}(P_n) = 1$$

$$|F_{\alpha}(P_n)| = |P_n(\alpha)| = |\alpha|^n$$

$$\frac{|F_{\alpha}(P_n)|}{N_{\infty}(P_n)} = |\alpha|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\underline{Q} : F_{\alpha} \text{ n'est pas continue}$$

$$\text{Donc } F_{\alpha} \text{ est continue si } |\alpha| \leq 1$$

$$\text{b/ } \times A = \{P \in E / P(1) \neq 0\}$$

$$\text{mq: } A \text{ est un ouvert dans } (E, N_{\infty})?$$

$$A = \{P \in E / F_1(P) \neq 0\} = F_1^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

$$F_1 \text{ est continue et } \mathbb{R}^* \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = F_1^{-1}(\mathbb{R}^*) \text{ ouvert de } (E, N_{\infty})$$

$$\times B = \{P \in E / P(2) \neq 0\}$$

$$\text{mq: } B \text{ n'est pas un ouvert de } (E, N_{\infty})?$$

$$C = C_E^B = \{P \in E / P(2) = 0\}$$

$$\text{mq: } C \text{ n'est pas un fermé de } (E, N_{\infty})?$$

$$Q_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n - 1$$

$$Q_n(2) = 0 \Rightarrow (Q_n) \text{ une suite de } C.$$

$$N_{\infty}(Q_{n+1}) = \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow (Q_n) \text{ c.v vers } (-1) = Q$$

$$\Rightarrow Q(2) = -1 \neq 0 \Rightarrow Q \notin C.$$

$$\text{Donc: } C \text{ n'est pas un fermé.}$$

$$\underline{Q} : B \text{ n'est pas un ouvert.}$$

$$\text{Rq: } (P_n) \text{ c.v vers } P$$

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t)$$

Ex 10: $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n, $A \neq \emptyset$

A fermée, $f: A \rightarrow A$ une app

$$(x_n) = \begin{cases} x_0 \in A \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$B = \{x \in A / f(x) = x\}$$

1/ f continue sur A .

a/ (x_n) suite de A avec (x_n) c.v vers a

$\Rightarrow a \in \bar{A} = A$ car A fermé

$\Rightarrow \underline{a \in A}$.

b/ mq B est un fermé de E ?

soit (b_n) une suite de B c.v vers b

mq: $b \in B$?

$\forall n, b_n \in A$ et $f(b_n) = b_n$

(b_n) suite de $A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \underline{b \in A}$
car A fermé

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$
 f continue en b $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(b)$

$\forall n, f(b_n) = b_n$

$n \rightarrow +\infty: \underline{f(b) = b}$

$\mathcal{Q}: b \in A$ et $f(b) = b \Leftrightarrow b \in B$.

d'où B est un fermé de E .

2/ A compact de E

$B \subset A$ avec B fermé de E

Cours $\Rightarrow B$ compact de E .

Prouve: soit (b_n) suite de B

$B \subset A \Rightarrow (b_n)$ suite de $A = \text{compact}$

$\Rightarrow \exists$ s. suite $(b_{\varphi(n)})$ c.v vers $b \in A$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{\varphi(n)} = b \in A$

or $(b_{\varphi(n)})$ suite de $B = \text{fermé}$ c.v vers b

$\Rightarrow \underline{b \in B}$.

$\mathcal{Q}: B$ compact de E .

a) A compact de E , $f: A \rightarrow A$

f est k -lipchitzienne sur A , $k \in]0, 1[$

$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ (1)

a/ récurrence sur n :

pour $n=0$, vrai

supposons que: $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$

mq: $\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq k^{n+1} \|x_1 - x_0\|$

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\|$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} k \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq k^{n+1} \|x_1 - x_0\|.$$

b/ (x_n) suite de $A = \text{compact}$

$\Rightarrow \exists (x_{\varphi(n)})$ c.v vers $a \in A$

mq: $(x_{\varphi(n)+1})$ c.v vers a .

a/ $\Rightarrow \|x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}\| \leq k^{\varphi(n)} \|x_1 - x_0\|$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}) = 0$
car $k \in]0, 1[$
 $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$\text{or} = x_{\varphi(n)+1} = \underbrace{(x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)})}_{\rightarrow 0} + \underbrace{x_{\varphi(n)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + a = a$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)+1} = a$

c/ f k -lipchitzienne sur A

Cours $\Rightarrow f$ u.c sur A

* on sait que: $a \in A$ mq: $f(a) = a$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)+1} = a$ or $x_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$

(1), (a) $\Rightarrow f(a) = a$ (car: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$)
 $\Rightarrow a \in B$ (f continue en a)

* mq: $B = \{a\}$?

supposons $\exists a' \in B$ tq $a' \neq a$:

$$\Rightarrow a' \in A \text{ et } f(a') = a'$$

$$\text{or } \|f(a') - f(a)\| \leq K \|a' - a\|$$

$$\Rightarrow \|a' - a\| \leq K \|a' - a\|$$

$$\Rightarrow 1 \leq K \text{ absurde : car } K \in]0, 1[$$

$$\mathcal{Q} = B = \{a\}.$$

3/ A compact de E, $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (1)$$

$$a/ g(x) = \|f(x) - x\|$$

$$\text{Rq: } \forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

$\Rightarrow f$ lipschitzienne sur A de rapport 1 $\Rightarrow f$ est continue

$$\Rightarrow g \text{ continue sur } A \text{ compact } \left\{ \begin{array}{l} g: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \|f(x) - x\| \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \exists b \in A / \min_{x \in A} g(x) = g(b) \quad (2)$$

$$b/ \text{mq: } f(b) = b?$$

supposons que: $f(b) \neq b$

$$b \in A \xRightarrow{(1)} f(b) \in A \quad \|f(f(b)) - f(b)\| < \|f(b) - b\| = g(b)$$

$$\Rightarrow g(f(b)) < g(b) \quad (2) \\ = \min_{x \in A} g(x) \text{ absurde}$$

$$\mathcal{Q} = \{f(b) = b\}.$$

$$x b \in A, f(b) = b$$

$$\Rightarrow b \in B \text{ mq: } \{b\} = B$$

supp $\exists b' \in B / b' \neq b$

$$(1) \Rightarrow \|f(b') - f(b)\| < \|b' - b\|$$

$$\|b' - b\| < \|b' - b\|$$

impossible

$$\mathcal{Q} = \{B = \{b\}\}.$$