

Exercice 1 :

1. Posons : $f_n(x) = ne^{-n^2 x^2}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$). La convergence est-elle uniforme sur $]0, +\infty[$?
2. Posons : $f_n(x) = nx^n \ln x$, $f_n(0) = 0$. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$.
3. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n], \quad f_n(x) = 0 \text{ si } x \in]n, +\infty[$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. Posons : $f_n(x) = \inf(n, x)$. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Posons : $f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $\alpha < 1$.
6. Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n x^2}, \quad I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$. Calculer I_n . La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

7. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ si } x \in]0, +\infty[, \quad f_n(0) = 0$$

Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2 :

1. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(x+1)}\right)$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

2. Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$$

a / Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b / On note $R_n(x)$ son reste d'ordre n . Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1 - e^{-x})}$$

c / En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

3. Soit (a_n) une suite complexe telle que la suite des sommes partielles $(A_n = \sum_{k=0}^n a_k)$ soit bornée. Pour tout $x > 0$, on pose $v_n(x) = a_n n^{-x}$.

a / Montrer que $\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 / p < q$:

$$\sum_{k=p}^q v_k(x) = \frac{A_q}{q^x} - \frac{A_{p-1}}{p^x} + \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right)$$

b / En déduire que pour tout $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$. La convergence est-elle normale sur $[\alpha, +\infty[$? (Considérer $a_n = e^{in}$).

Exercice 3 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Exprimer $\int_0^1 f(x) dx$ comme somme d'une série convergente.

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2 + n^2} \geq \frac{1}{5}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

2. Posons : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \geq \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$$

La convergence est-elle uniforme sur $]0, +\infty[$?

3. On pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + x^2 n^2}$$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, qu'il existe $K > 0$, $f(x) \sim \frac{K}{x^2}$ en $+\infty$ et que $f(x) \sim -2 \ln x$ en 0^+ .

(Comparer $f(x)$ à une intégrale).

4. On pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable à droite en 0.

Montrer que $\forall k > 0$, $g(x) = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \geq 0$, posons :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{1 + x^n}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

3. Soit $a \in [0, 1[$. On pose :

$$I_n = \int_0^a \frac{e^t}{1 + t^n} dt, \quad J_n = \int_0^a \frac{t^n e^t}{1 + t^n} dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

a / Calculer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de l'intégrale I_n .

b / Soit $p > 0$. Montrer que quand $n \rightarrow +\infty$, $n^p J_n \rightarrow 0$. En déduire que $I_n = e^a - 1 + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

Exercice 5 : (Extrait du concours)

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge et que la suite $(R_n(x))_{n \geq 0}$ de ses restes vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2}.$$

On pose

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

4. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) - f(x) = -\frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

(c) Déduire alors que, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}).$$

Exercice 6 :

Pour tout $x > 0$, posons :

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Montrer que θ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$, $\theta(x+1) + \theta(x) = \frac{1}{x}$.
2. Montrer que θ est continue sur $]0, +\infty[$ et donner un équivalent de $\theta(x)$ quand $x \rightarrow 0$.
3. Calculer la limite de $\theta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Soit φ une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$ et telle que :

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) - \theta(x) = (-1)^n (\varphi(x+n) - \theta(x+n))$ en déduire que $\varphi = \theta$.

5. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+x}\right)$$

- a / Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $]0, +\infty[$. On note F sa somme.
- b / Montrer que $\forall x > 0$, $F(x) - F(2x) = \theta(2x)$ en déduire que $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta(2^n x)$.

Exercice 7 :

Pour tout $x \geq 0$, posons :

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

1. Montrer que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \geq 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x+1}$.
2. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa fonction dérivée.
3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n+1)$ en déduire la limite de $\psi(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+x}$$

- a / Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ est convergente. On note γ sa somme.
- b / Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on exprimera en fonction de ψ et γ .

Exercice 8 :

On pose :

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \right)$$

1. Déterminer les domaines de définitions de μ et ζ et montrer que $\forall x > 1$, $\mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.
2. Calculer les limites de $\mu(x)$ et $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$1 - 2\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$$

En déduire que $\forall x > 0$, $0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - 2^{-x}$. Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} \mu(x)$.

4. Montrer que la fonction ζ est C^∞ sur son domaine et qu'elle est convexe.
5. Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 1$, $F(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$. En déduire que quand $x \rightarrow 1$, $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$. Où $\gamma = F(1)$.
6. Montrer que la fonction μ est C^1 sur son domaine et calculer $\mu'(x)$.
7. Déterminer le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 1 de la fonction μ .

En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

Exercice 9 :

Pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(n+x)}, \quad u_n(x) = \ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ en déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction f strictement positive.

2. Montrer que $f(1) = 1$, $f(x+1) = xf(x)$, $\forall x > 0$ et que $f(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, $f_n(x) = \exp[g_n(x)]$ en déduire que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction g que l'on exprimera à l'aide de f .

4. Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation suivante :

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} [g_n(x) - g_{n-1}(x)]$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner sa fonction dérivée. En déduire la limite de la suite de fonctions $(g'_n)_{n \geq 1}$.

5. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Que vaut $f'(1)$?

Exercice 10 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

1°/ a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b) ya-t-il convergence uniforme sur $]0, +\infty[$?

2°/ On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

a) Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $\forall x > 0$, on a : $S(x+1) - xS(x) = -1$.

c) En déduire que $S(x) \sim \frac{e}{x}$ et $S(x) \sim \frac{1}{x}$.

3°/ a) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de $f_n(x)$.

b) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera tel que :

$$S(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

c) Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

4°/ a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, on a : $\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^2(x+n)}$.

b) En déduire que lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

5°/ Montrer que $\forall x \geq 1$, on a : $S(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{1-t} dt$.

Ex 2 :

$$1) \forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$f_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n(x+1)} \right)$$

$$n \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n(x+1)} \right) \text{ est } \downarrow \text{ vers } 0 \text{ donc :}$$

$$\sum f_n(x) \text{ c.v. (c.s.s.A)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right|$$

$$\stackrel{\text{c.s.s.A}}{\leq} |f_{n+1}(x)| = \ln \left(1 + \frac{x}{(n+1)(x+1)} \right)$$

$$\leq \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(car $\frac{x}{x+1} \leq 1$)

$$(R_n) \text{ c.u vers } 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\underline{Q} = \sum f_n \text{ c.u sur } \mathbb{R}_+.$$

$$* |f_n(x)| = \ln \left(1 + \frac{x}{n(x+1)} \right) \sim \frac{x}{n(x+1)}$$

$$\Rightarrow \sum f_n \text{ c.v.} \Rightarrow \sum f_n \text{ c.v. sur } \mathbb{R}_+$$

$$2) \forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}_+, U_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$2/ n^2 U_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \sum U_n(x) \text{ c.v.}$$

$$\Rightarrow \sum U_n(x) \text{ c.s sur } \mathbb{R}_+.$$

$$b/ \forall x \in]0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x e^{-kx}}{\ln(k)} \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx}$$

$$\leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{x e^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$$

$$\leq \frac{x e^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$$

$$\underline{Q} = 0 \leq R_n(x) \leq \frac{x e^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$$

$$c/ \forall x \in]0, +\infty[, |R_n(x)| = R_n(x)$$

$$\leq \frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\varphi \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi \text{ bornée}$$

$$\exists M > 0 \text{ tq } \varphi(x) \leq M, \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}$$

$$R_n(0) = 0 \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow (R_n) \text{ c.u vers } 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

$$\underline{Q} = \sum U_n \text{ c.u sur } \mathbb{R}_+.$$

$$* \|U_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left(\frac{x e^{-nx}}{\ln(n)} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (h(x))$$

$$\text{avec } h(x) = x e^{-nx}, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$h'(x) = e^{-nx} - n x e^{-nx} = (1-nx) e^{-nx}$$

x	0	1/n	+\infty
h'(x)		+	-
h(x)	0		0

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}_+} h(x) = h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n}$$

$$\Rightarrow \|U_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \frac{e^{-1}}{n \ln(n)} \quad \text{cas difficile } \alpha=1$$

$$\text{mq } \sum \frac{1}{n \ln(n)} \text{ diverge? } \frac{1}{\ln 0}$$

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)} = \sum_{n \geq 2} f(n)$$

avec: $f(t) = \frac{1}{t \ln(t)}$, $\forall t \in [2, +\infty[$

f continue, ≥ 0 et $\downarrow$ sur $[2, +\infty[$

$$F(x) = \int_2^x f(t) dt = \left[\ln(\ln t) \right]_2^x$$

$$= \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

$$\int_2^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge avec } f \geq 0$$

$\Rightarrow f$ n'est pas int sur $[2, +\infty[$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n \ln(n)} \text{ diverge.}$$

$$\mathcal{Q} = \sum \|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}^+} \text{ diverge c.a.d.}$$

$$\sum u_n \text{ c.v. sur } \mathbb{R}^+.$$

3) (a_n) suite complexe / $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ bornée

$$\Rightarrow \exists M > 0 / |A_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\forall x > 0, n \in \mathbb{N}^*, v_n(x) = a_n n^{-x} = \frac{a_n}{n^x}$$

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, p < q.$$

$$\sum_{k=p}^q v_k(x) = \sum_{k=p}^q a_k \cdot \frac{1}{k^x}$$

$$= \sum_{k=p}^q (A_k - A_{k-1}) \frac{1}{k^x}$$

$$= \sum_{k=p}^q \frac{A_k}{k^x} - \sum_{k=p-1}^{q-1} \frac{A_k}{(k+1)^x}$$

$$= \frac{A_q}{q^x} - \frac{A_{p-1}}{p^x} + \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right)$$

b/ soit $\alpha > 0$, $m_q = \sum v_n$ c.u sur $[\alpha, +\infty[$?

$$* S_n = \sum_{k=1}^n v_k(x) = \underbrace{\frac{A_n}{n^x}}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \rightarrow 0 \text{ (}(A_n) \text{ bornée)}}} - \underbrace{\frac{A_0}{1^x}}_{=A_0} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right)$$

$$m_q = (S_n) \text{ c.v. ?}$$

$$m_q = (w_n) \text{ c.v. ?}$$

$w_n =$ somme partielle d'ordre $n-1$ de la série $\sum A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$

$$m_q = \sum A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \text{ c.v. ?}$$

$$\left| A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \right| = |A_n| \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$$

$$\leq M \cdot \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) = t_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0 \quad (x > 0) \Rightarrow \sum t_n \text{ c.v.}$$

$$\Rightarrow \sum A_n \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \text{ abs c.v. donc c.v.}$$

$$\Rightarrow (w_n) \text{ c.v.} \Rightarrow (S_n) \text{ c.v.}$$

$$\Rightarrow \sum v_n(x) \text{ c.v.}$$

$$\text{donc} = \sum v_n \text{ c.u sur } [\alpha, +\infty[$$

$$* \forall x \in [\alpha, +\infty[,$$

$$\left| \sum_{k=p}^q v_k(x) \right| \stackrel{(a)}{\leq} \frac{|A_q|}{q^x} + \frac{|A_{p-1}|}{p^x} +$$

$$\sum_{k=p}^{q-1} |A_k| \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right)$$

$$\leq \frac{M}{q^x} + \frac{M}{p^x} + M \sum_{k=p}^{q-1} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right)$$

$$\leq \frac{2M}{p^x}$$

$$q \rightarrow +\infty \Rightarrow \left| \sum_{k=p}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq \frac{2M}{p^x}$$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq \frac{2M}{(n+1)^x} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow (R_n) \text{ c.u vers } 0$$

$$\text{sur } [\alpha, +\infty[$$

$$\mathcal{Q} = \sum v_n \text{ c.u sur } [\alpha, +\infty[.$$

$$x a_n = e^{in} \\ A_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n e^{ik} = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}$$

$$|A_n| \leq \frac{2}{|1 - e^i|} = M = \text{cte} \Rightarrow (A_n) \text{ bornée}$$

$$v_n(x) = \frac{a_n}{n^x} = \frac{e^{in}}{n^x}, \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[$$

$$|v_n(x)| = \frac{1}{n^x} \Rightarrow \|v_n(x)\|_{\infty}^{\alpha, +\infty[} = \frac{1}{n^\alpha}$$

pour $0 < \alpha < 1$, $\sum v_n$ c.v. sur $[\alpha, +\infty[$

Ex 3 :

$$1/ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$$

* Mq $\sum u_n$ c.u. sur tout segment de $\mathbb{R}$?

soit $a > 0$ q.l.q, Mq $\sum u_n$ c.u. sur $[-a, a]$?

$$\forall x \in [-a, a], |u_n(x)| = \frac{|x|}{x^2 + n^2} \leq \frac{|x|}{n^2} \\ \leq \frac{a}{n^2} = \alpha_n$$

$\sum \alpha_n$ c.v. $\Rightarrow \sum u_n$ c.v. donc c.u. sur

$\mathbb{Q} = \sum u_n$ c.u. sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$.

$$* f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2} \text{ continue sur } [0, 1]$$

et on a trouvé $\sum u_n$ c.u. sur $[0, 1]$

$$\text{donc} = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + n^2} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + n^2) \right]_0^1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\ln(1 + n^2) - \ln(n^2) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$* \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \geq \frac{1}{5} ?$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{(k+n)^2 + n^2} \\ \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{5n} = n \cdot \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}$$

$$\Delta: \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$R_n(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \\ \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k^2 + n^2} \geq \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(n) \neq 0$ donc (R_n) c.u. vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

c.a.d. $\sum u_n$ c.u. sur $\mathbb{R}_+$.

$$2) f_n(x) = n e^{-nx}$$

$$* \forall x \in]0, +\infty[, n^2 f_n(x) = n^3 e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ c.v. alors $\sum f_n$ c.s. sur $]0, +\infty[$

$$* \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{e^{kx}} \geq 1$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k$$

$$\geq \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$$

$$* \forall x \in]0, +\infty[, R_n(x) \geq \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$$

$$R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum f_n \text{ c.u.}$$

$\Rightarrow (R_n)$ c.u. vers 0 sur $]0, +\infty[$.

$$3) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + x^2 n^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n(x) = \frac{1}{n + x^2 n^2} \sim \frac{1}{x^2 n^2}$$

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ c.v. $\Rightarrow f$ bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$* x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n + x^2 n^2} = g_n(x)$$

(3)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2} = b_n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, |g_n(x)| = \frac{x^2}{n+x^2} \leq \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{n} = \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = b_n$$

$$\sum \alpha_n \text{ c.v.} \Rightarrow \sum g_n \text{ c.N donc c.u}$$

$$\text{sur } A = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$+\infty$ adhérent à $\mathbb{R}^*$.

$$\text{Th d'interversion: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = k > 0$$

$$\text{donc } x^2 f(x) \underset{+\infty}{\sim} k$$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{x^2} \text{ avec: } k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ex5:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

$$n \mapsto e^{-nx} \downarrow \text{ de limite } \begin{cases} 1 \text{ si } x=0 \\ 0 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

$$n \mapsto \frac{1}{n+1} \downarrow \text{ de limite } 0$$

$$\Rightarrow n \mapsto \frac{e^{-nx}}{n+1} \downarrow \text{ de limite } 0.$$

$$\text{donc: } \sum_{n \geq 0} f_n(x) \text{ c.v. (c.s.s.s.A)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

$$|R_n(x)| \underset{\text{c.s.s.s.A}}{\leq} |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\text{on pose: } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow (R_n) \text{ c.u vers } 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$\text{alors } \sum f_n \text{ c.u sur } \mathbb{R}_+$$

$$\underline{Q} = f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+.$$

$$3) f_0(x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 = b_0$$

$$\boxed{\alpha_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = b_n$$

$$\sum f_n \text{ c.u sur } A = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

$$+\infty \text{ adhérent à } A.$$

$$\text{TR. d'interversion} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n + \underbrace{b_0}_{=1} = 1$$

$$4) a) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\sum f_n \text{ c.s sur }]0, +\infty[\quad (1)$$

$$f'_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{n e^{-nx}}{1+n}, \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\text{soit } [a, b] \subset]0, +\infty[. \text{ Mq } \sum f'_n \text{ c.u sur } [a, b]?$$

$$\forall x \in [a, b], |f'_n(x)| = \frac{n}{n+1} e^{-nx}$$

$$\leq \frac{n}{n+1} e^{-na} \leq e^{-na} = \alpha_n$$

$$n^2 \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ car } a > 0$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_n \text{ c.v} \Rightarrow \sum f'_n \text{ c.N donc c.u sur } [a, b].$$

$$\underline{Q} = f \text{ est de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.$$

$$b) \forall x > 0,$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n e^{-nx}}{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n e^{-nx}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n+1} (n+1)$$

$$= - \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-x})^n = \frac{-1}{1+e^{-x}}$$

f vérifie l'éq diff: (E): $y' - y = \frac{-1}{1+e^x}$ sur $]0, +\infty[$

(E): $y' = y - \frac{1}{1+e^x}$

(E_h): $y' = y \Rightarrow y_h = c \cdot e^{\int 1 dx} = c e^x$
 $c \in \mathbb{R}$

$y_p = c(x) e^x$

y_p vérifie (E) lorsque:

$$c(x) = \int \frac{\frac{-1}{1+e^x}}{e^x} dx = \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\ln(1+e^{-x})$$

$\Rightarrow y_p = e^x \ln(1+e^{-x})$

D'où: $y = y_h + y_p = c e^x + e^x \ln(1+e^{-x})$

$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = c e^x + e^x \ln(1+e^{-x})$

$e^{-x} f(x) = c + \ln(1+e^{-x})$

$x \rightarrow +\infty: \underline{c=0}$

donc: $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \ln(1+e^{-x}) e^x$

f continue en 0 $\Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$

$\Rightarrow f(0) = \ln(2)$

(A)₁(2) $\Rightarrow \forall x \geq 0, f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

Ex 7:

$x \geq 0, \Psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$

$\forall x \geq 0, \Psi_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

$\Psi_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \sum \Psi_n(0)$ c.v

$\forall x > 0, \Psi_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2} > 0$

$\Rightarrow \sum \frac{x}{n^2}$ c.v donc $\sum \Psi_n(x)$ c.v

cl: $\forall x \geq 0, \sum_{n \geq 1} \Psi_n(x)$ c.v alors Ψ est bien définie sur $[0, +\infty[$.

$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$

$\left[\frac{-1}{1+e^x} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right)$

téléscopique: $= \frac{1}{1+x} - 0 = \frac{1}{x+1}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Psi_n$ est de classe $\mathcal{E}^1$ sur $[0, +\infty[$

$\sum \Psi_n$ c.s sur $[0, +\infty[$ (d'après 1)

$\Psi'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$

$\forall x \in [0, +\infty[, |\Psi'_n(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2} = \alpha_n$

$\Rightarrow \sum \alpha_n$ c.v alors $\sum \Psi'_n$ c.v donc c.u sur $[0, +\infty[$.

cl = Ψ de classe $\mathcal{E}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$\forall x \in [0, +\infty[, \Psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi'_n(x)$

$\Psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$

3) $\forall k \in \mathbb{N}, \Psi(k+1) - \Psi(k) = \frac{1}{k+1}$

$\sum_{k=0}^n \Psi(k+1) - \Psi(k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$

$\Psi(n+1) - \underbrace{\Psi(0)}_0 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \Psi(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x) = ?$

$\Psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0 \Rightarrow \Psi \uparrow$ sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x) = l$ existe.

$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Psi(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = +\infty$

(car $\sum \frac{1}{n}$ div à termes ≥ 0)

$\Rightarrow \underline{l = +\infty}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x) = +\infty$

$$n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+x}$$

$$a/ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2} (\geq 0)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \dots$$

$$\sum \frac{1}{2n^2} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \text{ c.v.}$$

$$\text{on note : } \gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

b/ mq = la suite (f_n) c.s sur $]0, +\infty[$

soit $x \in]0, +\infty[$, mq = $(f_n(x))_{n \geq 1}$ c.v.?

Δ : mq (U_n) c.v. = $\begin{cases} \nearrow \text{majorée} \\ \searrow \text{minorée} \\ (U_{2n}), (U_{2n+1}) \\ \text{téléscopique} \\ \text{comparaison intégrale} \end{cases}$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x+n+1) - \ln(x+n) - \frac{1}{n+x}$$

$$= \ln\left(\frac{x+n+1}{x+n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

$$\sim \frac{-1}{2(n+x)^2} \sim \frac{-1}{2n^2} (\leq 0)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) \text{ c.v.} = \text{série téléscopique}$$

$$\left(\text{car } \sum -\frac{1}{2n^2} \text{ c.v.} \right)$$

$$\Rightarrow \text{la suite } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ c.v.}$$

$$(f_n) \text{ c.s sur }]0, +\infty[.$$

$$\text{on note : } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \text{ avec } S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+x} \quad (1)$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) = B_n \quad (6)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad (2)$$

$$f_n(x) \stackrel{(1)}{=} \ln(x+n) + S_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{x}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \ln(x+n) + S_n(x) - B_n - \ln(n) - \frac{1}{x}$$

$$= S_n(x) - B_n(x) + \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) - \frac{1}{x}$$

$$n \rightarrow +\infty : f(x) = \Psi(x) - \gamma - \frac{1}{x}$$

Ex 10 :

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)}, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$1) a/ \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \frac{1}{x+k}}{\prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}}$$

$$= \frac{1}{x+n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

$$\text{D'Alembert} \Rightarrow \sum f_n(x) \text{ c.v.}$$

$$\text{D'aut} : \sum f_n \text{ c.s sur }]0, +\infty[.$$

$$\text{Indication : utiliser } a_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \times \prod_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$$

$$\Rightarrow f_n(a_n) = (n+1)! \times \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{(n+1)! + k} \right) \geq \frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^n (n+1+k)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a_n) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \sum f_n \text{ c.s sur }]0, +\infty[$$

$$a/ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\boxed{\frac{1}{k+x}} \quad a/ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$\text{soit } [a, b] \subset]0, +\infty[$$

$$\forall x \in [a, b], |f_n(x)| = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$$

$$\leq \prod_{k=0}^n \frac{1}{a+k} = f_n(a) = \alpha_n$$

$\sum a_n$ c.v. ($1/a$) $\Rightarrow \sum f_n$ c.v. donc c.v. sur $[a, b]$
 (Req: $\sum f_n$ c.v. sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$)

$\mathcal{Q} = S$ continue sur $]0, +\infty[$.

$$b/ S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+1+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x \times f_{n+1}(x)$$

$$= x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

$$= x (S(x) - \underbrace{f_0(x)}_{=1/x})$$

$$= x S(x) - 1$$

$$\Rightarrow S(x+1) - x S(x) = -1.$$

$$c/ x S(x) = S(x+1) + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x S(x) = S(1) + 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } S \\ \text{est} \\ \text{continue} \end{array} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(1)$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{1}{1+k}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{série exp}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\Rightarrow x S(x) \underset{0^+}{\sim} e \Rightarrow \boxed{S(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{e}{x}}$$

$$* \text{mq} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x S(x) = 1?$$

$$x S(x) = S(x+1) + 1 \quad (1)$$

$$\text{mq} = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = b_n$$

$\sum f_n$ c.v. sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ (voir Req)

$\Rightarrow$ Th d'interversion =

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{b_n}_0 = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x+1) = 0 \xrightarrow{?} \lim_{x \rightarrow +\infty} x S(x) = ?$$

$$\mathcal{Q} = \boxed{S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

$$3) f_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$a/ f_n(x) \xrightarrow{\text{D.E.S}} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \dots + \frac{a_k}{x+k} + \dots$$

$$a_k = \left[(x+k) f_n(x) \right]_{x=-k} = \left[\frac{1}{x(x+1)\dots(x+k-1)\dots(x+k+1)\dots(x+n)} \right]_{x=-k}$$

$$= \frac{1}{-k(-k+1)(-k+2)\dots(-k+k-1)(1 \times 2 \times \dots \times n-k)} = \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{(-1)^k k! (n-k)!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!}$$

$$\mathcal{Q} = f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (n-k)! (x+k)}$$

$$b/ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

$$\text{or } f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (x+k)} \times \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^n U_k V_{n-k}$$

$$\text{avec } \begin{cases} U_n = \frac{(-1)^n}{n! (x+n)} \\ V_n = \frac{1}{n!} \end{cases}$$

$$|U_n| \leq \frac{1}{x n!} \text{ donc } \sum U_n \text{ et } \sum V_n \text{ sont abs c.v.}$$

Produit de Cauchy donne =

$$(7) S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} V_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n \right)$$

$$S(x) = e^{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}} \quad (1=e)$$

$$c/\forall x > 0, S(x) = e^{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}} = g_n(x)$$

* / $\forall n \in \mathbb{N}, g_n$ de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

* / $\sum g_n$ c.s. sur $]0, +\infty[$.

$$* / \text{ soit } p \in \mathbb{N}^*, g_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{x+n} \right)^{(p)} \\ = \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{(-1)^p \cdot p!}{(x+n)^{p+1}} \quad \text{Formule: a retenir}$$

soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$,

$$\forall x \in [a, b], |g_n^{(p)}(x)| = \frac{p!}{n!(x+n)^{p+1}}$$

$$< \frac{p!}{n!(a+n)^{p+1}}$$

$$< \frac{p!}{(a+n)^{p+1}} = \alpha_n$$

$$\alpha_n \sim \frac{p!}{n^{p+1}} \quad / \quad p+1 \geq 2 \Rightarrow \sum \alpha_n < \infty$$

$\Rightarrow \sum g_n^{(p)}$ c.i.v. donc c.u. sur $[a, b]$

$\underline{1} = S$ est de classe $\mathcal{E}^\infty$.

$$a) \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3(x+n)} =$$

$$\frac{n-x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3(x+n)} = \frac{n^2 - x^2 + x^2}{n^3(x+n)} \\ = \frac{1}{x+n}$$

$$b) \frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3(x+n)} \quad (1)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{x^2}{n^3(x+n)} = -\frac{1}{n} + \frac{x}{n^2} + \frac{1}{x+n}$$

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{x^2}{n^3(x+n)}$$

$$\text{donc } S(x) = e^{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!x} - \frac{(-1)^n x}{n!x^2} + \frac{(-1)^n x^2}{n!(x+n)x^2}}$$

$$= e^{\left(\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!(x+n)} \right)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} x \cdot E(x)$$

$$\text{avec } E(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e(-1)^n n^2}{n!(x+n)}$$

$$mq = \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = 0.$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 0 = b_n$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, |h_n(x)| \leq \frac{e}{(n-1)!} = \alpha_n$$

$\sum \alpha_n < \infty \Rightarrow \sum h_n$ c.i.v. sur $]0, +\infty[$.

Th d'interversion $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = 0$.

$$\underline{2} = S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

$$B/Mq = \forall x \geq 1, S(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{1-t} dt?$$

$$\forall t \in [0, 1], h(t) = t^{x-1} e^{1-t} = e t^{x-1} e^{-t}$$

$$= e t^{x-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e (-1)^n t^{n+x-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t)$$

$\forall n, h_n$ est continue sur $[0, 1]$.

$$\forall t \in [0, 1], |h_n(t)| = \frac{e t^{n+x-1}}{n!} \leq \frac{e}{n!} = \alpha_n$$

$\sum \alpha_n < \infty \Rightarrow \sum h_n$ c.i.v. donc c.u. sur $[0, 1]$

$$\text{donc } \int_0^1 t^{x-1} e^{1-t} dt = \int_0^1 h(t) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e (-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{n+x} t^{n+x} \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e \frac{(-1)^n}{n! (n+x)} = S(x).$$

Ex 9 :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(n+x)}$$

$$U_n(x) = \ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right)$$

$$1/U_n = \ln\left(\frac{(n+1)^x (n+1)! \cancel{x(x+1)\dots(x+n)}}{\cancel{x(x+1)\dots(x+n)} (x+n+1) n^x n!}\right)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \cdot \frac{n+1}{n+1+x}\right)$$

$$= x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$

$$= \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum \frac{1}{n^2} \text{ c.v.} \Rightarrow \sum U_n(x) \text{ c.v.}$ si on travaille avec o on s'arrête à l'ordre 2

$$\mathcal{U} = \sum U_n \text{ c.s sur }]0, +\infty[.$$

$$* U_n(x) = \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x))$$

$$\text{donc } \sum_{n \geq 1} \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x)) \text{ c.v.}$$

$$\Rightarrow \text{la suite } h_n(x) = \ln(f_n(x)) \text{ c.v.}$$

$$\text{on pose : } h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) \quad \forall x > 0.$$

$$f_n(x) = e^{h_n(x)}$$

$$\Rightarrow \forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{h(x)} = f(x) > 0$$

$$\mathcal{U} = (f_n) \text{ c.s sur }]0, +\infty[\text{ vers } f > 0.$$

$$2) \forall x > 0, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$$* f(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$* f_n(x+1) = \frac{(n)^{x+1} n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)}$$

$$= \frac{x n}{x+n+1} \times \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$= \frac{x n}{n+x+1} f_n(x)$$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x+1) = x f(x) \quad \forall x > 0.$$

$$* \text{ pour } n=0, f(1) = 1 \text{ vrai}$$

$$\text{supposons que } f(n+1) = n!$$

$$\text{et mg } f(n+2) = (n+1)!$$

$$f(n+2) = f(n+1+1) = (n+1) f(n+1)$$

$$= (n+1) n! = (n+1)!$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, g_n(x) = x \ln(n) -$$

$$\ln(x) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

$$f_n(x) = e^{g_n(x)} ?$$

$$g_n(x) = \ln(n^x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{x+k}\right)$$

$$e^{g_n(x)} = e$$

$$= n^x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k}\right)}$$

$$= \frac{n^x}{x} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k}$$

$$= \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = f_n(x).$$

$$* g_n(x) = \ln(f_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(f(x))$$

$$(g_n) \text{ c.s sur }]0, +\infty[\text{ vers } g(x) = \ln(f(x)) \quad \forall x > 0.$$