

1) soit $\|\cdot\|$ une norme sous multiplicative

$$(\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|).$$

par récurrence: $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

(si $\|A\| < 1 \Rightarrow \sum A^k$ eug et $\underline{I_n - A} \in \underline{Gln(\mathbb{K})}$ et $\underline{(I_n - A)^{-1} = \sum A^k}$)

en effet:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\sum \|A\|^k$ série géométrique. de plus $\|A\| < 1$.

$\Rightarrow \sum \|A\|^k$ eug d'où $\sum \|A^k\|$ eug.

$\sum A^k$ eug absolument + dim $(M_n(\mathbb{K})) < \infty$.

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=1}^{\infty} A^k = A^0 = I_n$$

$$\Rightarrow (I_n - A) \in Gln(\mathbb{K}) \quad (I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

2) $Gln(\mathbb{K})$ est un ouvert:

$$B = \left\{ \pi \in Gln(\mathbb{K}) \mid \|A - \pi\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \right\} = B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right).$$

$$\text{Soit } \pi \in B. \Rightarrow \|A - \pi\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \|A^{-1}\| \|A - \pi\| < 1.$$

$$\text{or } \|A^{-1}(A - \pi)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - \pi\| \text{ donc } \|A^{-1}(A - \pi)\| < 1.$$

$$\text{donc } \|I_n - A^{-1}\pi\| < 1.$$

$$\text{d'après 1: } I_n - (I_n - A^{-1}\pi) \in Gln(\mathbb{K}).$$

$$\Rightarrow A^{-1}\pi = C \in Gln(\mathbb{K}) \Rightarrow \pi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Inversible}}}{A} C \in Gln(\mathbb{K})$$

$$\text{d'où } B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subset Gln(\mathbb{K})$$

et par suite $Gln(\mathbb{K})$ un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ Série de Neumann.

3) autre méthode : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert :

Toute f.t. polynôme sur $\mathbb{K}^p$ est continue.

$$\Pi_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

$A: (a_{ij}) \mapsto \det A = \sum \varepsilon(G) \pi a_{ij}$: $\det$ est une f.t. polynôme en les coeff des matrices, donc $\det$ continue sur $\Pi_n(\mathbb{K})$.

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \Pi_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$$

• OR $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.

• $\det$ est continue sur $\Pi_n(\mathbb{K})$.

$\rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\Pi_n(\mathbb{K})$.

4) $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe / $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe par arcs :

② on suppose $GL_n(\mathbb{R})$ convexe ds $\Pi_n(\mathbb{R})$

comme I_n et $-I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $[-I_n, I_n] \subset GL_n(\mathbb{R})$
or $0 \in [-I_n, I_n] \Rightarrow 0 \in GL_n(\mathbb{R})$

① $f: \Pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \mapsto f(A) = \det(A)$
 $\hookrightarrow$ absurde ! ($\det 0 = 0$)
($GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe par arc).

$f(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car $f(GL_n(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{soit } \alpha \neq 0 \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \det C = \alpha$$

$f(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle
et f est continue.
 $\hookrightarrow f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe par arcs.

A convexe $\Rightarrow A$ convexe par arc.

• ① on ne peut pas construire un chemin entre

$-I_n$ et I_n sans se passer par 0
• seul les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des convexe de $\mathbb{R}$.

②

$$5) O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = I_n\}. \quad A^{-1} = {}^t A.$$

$$O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}, \quad O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

↓
Dém à Retenir
(reflexion)
E. euclidien

- $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe.
- $O_n(\mathbb{R})$ non connexe par arcs.
- $O_n^+(\mathbb{R}), O_n^-(\mathbb{R})$ sont des compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

$$① I_n \in O_n \text{ car } {}^t I_n \cdot I_n = I_n.$$

$$-I_n \in O_n \text{ car } {}^t (-I_n) \cdot (-I_n) = I_n.$$

on suppose $O_n(\mathbb{R})$ convexe, donc $0 \in [-I_n, I_n] \subset O_n(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow 0 \in O_n(\mathbb{R})$: Absurde.

$$0 \neq I_n.$$

↳ $O_n(\mathbb{R})$ non convexe.

$$② \text{ soit } A \in O_n(\mathbb{R}) \text{ donc } {}^t A \cdot A = I_n.$$

$$\det({}^t A \cdot A) = 1 \Rightarrow \det({}^t A) \cdot \det A = 1$$

$$\det^2 A = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

$$f: O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$A \mapsto f(A) = \det A. \quad f(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}:$$

$$I_n \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow f(I_n) = \det I_n = 1.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \quad {}^t C \cdot C = C^2 = I_n, \quad C \in O_n(\mathbb{R}).$$

$$f(C) = \det(C) = -1.$$

$$\Rightarrow f(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}.$$

$\{-1, 1\}$ n'est pas un intervalle.

f est continue sur $O_n(\mathbb{R})$ $\Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ non connexe par arcs.

③

$f: \Gamma_n(\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_n(\mathbb{R})$. $\pi \mapsto \pi: id_E$
 $A \mapsto t_A \cdot A$ est continue sur $\Gamma_n(\mathbb{R})$ comme
 étant produit des fcts continues.

$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \Gamma_n(\mathbb{R}) \mid t_A \cdot A = I_n\} = f^{-1}(\{I_n\})$
 $\{I_n\}$ fermé de $\Gamma_n(\mathbb{R})$
 f continue sur $\Gamma_n(\mathbb{R}) \Rightarrow O_n(\mathbb{R})$ fermé de $\Gamma_n(\mathbb{R})$
 $O_n(\mathbb{R})$ bornée: $\forall A \in O_n(\mathbb{R}) : \|A\| = (t_2(t_A \cdot A))^{1/2} = (t_2(I_n))^{1/2} = n^{1/2}$
 d'où $\|A\| \leq \sqrt{n}$ entier fixe (dim < ∞)
 $\hookrightarrow O_n(\mathbb{R})$ compact de $\Gamma_n(\mathbb{R})$.
 $\|A\| = t_2(t_A \cdot A)^{1/2}$
 est une norme sur $\Gamma_n(\mathbb{R})$.

$O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$.
 $\hookrightarrow$ fermé ($O_n(\mathbb{R})$ compact)
 $\hookrightarrow$ fermé ($\{1\}$ fermé, $\det$ continue)
 $\rightarrow O_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé inclus dans le compact $O_n(\mathbb{R})$
 $\rightarrow O_n^+(\mathbb{R})$ est un compact de $\Gamma_n(\mathbb{R})$

6) e^A ? peu def: $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$
 on a: $\sum \frac{A^k}{k!}$ cvg.
 $\| \frac{A^k}{k!} \| = \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$
 Abs cvg $\rightarrow$ cvg.
 + dim finie
 D'Alembert

① A diago $\rightarrow e^A$ diag
 $\hookrightarrow A$ diagonalisable $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \Gamma_n(\mathbb{R})$
 $A = P D P^{-1} \rightarrow \frac{A^k}{k!} = P \frac{D^k}{k!} P^{-1} \rightarrow P \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$
 $P \mapsto P T P^{-1}$ linéaire en dim finie
 $\hookrightarrow$ continue.

comme $\sum \frac{A^k}{k!}$ cvg: $\sum \frac{A^k}{k!} = P \sum \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$
 $= P \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} = e^A \rightarrow e^A$ diagonalisable

$$\Rightarrow \underline{GL_n(K) = M_n(K)}$$

$A \in M_n(K)$ $\chi_A = \det(xI_n - A)$: A possède un nombre fini de valeurs propres (χ_A de degré n).

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ donc $\frac{1}{k}$ n'est pas une valeur propre ($\exists k_0 \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{k} < \varepsilon$)

$\Rightarrow \chi_A(\frac{1}{k}) \neq 0$ par suite $\det(\frac{1}{k}I_n - A) \neq 0$

$$A_k = \frac{1}{k}I_n - A \in GL_n(K).$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$$

$GL_n(K) \subset M_n(K)$
(toujours).

$$\forall A \in M_n(K)$$

$\exists (A_k)$ une suite de $GL_n(K)$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$

$$\Rightarrow \overline{GL_n(K)} = M_n(K).$$

* Comme le nbr est fini de valeurs prop

soit $\varepsilon > 0$, $\exists$ de valeurs prop de A dans $]0, \varepsilon[$

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, on aura ce ε . $\exists k_0 \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

$$8) \underline{\overline{\Delta_p} = M_n(K)}$$

Δ_p : l'ensemble des matrices diagonalisables.

$$\bullet \overline{\Delta_p} \subset M_n(K) \text{ (toujours).}$$

$$\bullet GL_n(K) \subset \Delta_p \Rightarrow \overline{GL_n(K)} \subset \overline{\Delta_p} \text{ or } \overline{GL_n(K)} = M_n(K)$$

$$\hookrightarrow \text{Alors } M_n(K) \subset \overline{\Delta_p}$$

donc $\overline{\Delta_p} = M_n(K).$

$$9) \underline{\chi_{AB} = \chi_{BA}}$$

$\overline{GL_n(K)} = M_n(K)$ Alors $\exists (A_k) \in GL_n(K)$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$
 $A \in M_n(K).$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \lambda \in K, \det(\lambda I_n - A_k B) &= \det(A_k (\lambda I_n - B A_k^{-1}) A_k^{-1}) \\ &= \det A_k \cdot \det(\lambda I_n - B A_k) \cdot \det A_k^{-1} \\ &= \det(\lambda I_n - B A_k). \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \det(\lambda I_n - A_k B) = \det(\lambda I_n - B A_k) \quad (*)$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} (tI_n - A_k B) = tI_n - AB.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} (tI_n - B A_k) = tI_n - BA$$

det est continue. Alors $\lim_{t \rightarrow 0} \det(tI_n - A_k B) = \lim_{t \rightarrow 0} \det(tI_n - BA)$

$$\Rightarrow \det(tI_n - \lim_{t \rightarrow 0} A_k B) = \det(tI_n - B \lim_{t \rightarrow 0} A_k)$$

$$\underline{\varphi: A \rightarrow A^{-1} \text{ est continue}} \Rightarrow \det(tI_n - AB) = \det(tI_n - BA),$$

$$\Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{com}(A) \quad \text{bilineaire.}$$

$\varphi: A \rightarrow \bar{A}$ est continue:

$$\|\varphi(A) - \varphi(B)\| = \|\bar{A} - \bar{B}\| = \|\overline{A - B}\| = \|A - B\|$$

~ 1 -Lipschitzienne

$\leadsto$ continue.

e^A est ∞ :

$$\sum_n \frac{t^n A^n}{n!}$$

$$\textcircled{2} \text{ona: } \sum \frac{t^n A^n}{n!}$$

$\textcircled{1} t \mapsto \frac{t^n A^n}{n!}$ est ∞ polynomial.

cv absolument
Alus converge.

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1} A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^n = \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^{n-1}$$

$$\leq \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M \|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} \leq \|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M \|A\|)^n}{n!}$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\downarrow M \|A\|$$

$$e^A = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p$$

$\frac{A}{p}$ et I_n commutent :

$$\cdot \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{A^k}{p^k} = \sum_{k=0}^p \frac{p!}{(p-k)! p^k} \frac{A^k}{k!}$$

$$\cdot e^A - \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^p \frac{p!}{(p-k)! p^k} \frac{A^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^p \left(1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right) \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\frac{p!}{(p-k)! p^k} = \frac{p(p-1)\dots(p-(k-1))}{p^k} \leq 1$$

$$\leadsto \left(1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Donc}} \|e^A - \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p\| &\leq \sum_{k=0}^p \left(1 - \frac{p!}{(p-k)! p^k} \right) \frac{\|A\|^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} - \sum_{k=0}^p \frac{p!}{(p-k)! p^k} \frac{\|A\|^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\cdot \left(1 + \frac{\|A\|}{p} \right)^p = e^{p \log \left(1 + \frac{\|A\|}{p} \right)} \leq e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{p} \right)^p$$

$$\xrightarrow{\text{Donc}} \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\|A\|}{p} \right)^p = e^{\|A\|}$$

$$\text{Alors : } \lim_{p \rightarrow +\infty} \|e^A - \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p\| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p = e^A$$

$A^\perp$ est un sous espace vect ①
 { est un fermé ②

①. $\forall x \in A \quad \langle 0, x \rangle = 0 \Rightarrow 0 \in A^\perp$

$x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. soit $z \in A$.

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle = 0.$$

$$\Rightarrow x + \lambda y \in A^\perp.$$

②. $(x_n)_n \subset A^\perp$ tq $x_n \rightarrow x$.

tq $x \in A^\perp$, soit $z \in A$.

$$|\langle x_n - x, z \rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|z\|.$$

or $x_n \rightarrow x$ Alors $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle x_n - x, z \rangle| = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle x_n, z \rangle - \langle x, z \rangle| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle.$$

donc. $\langle x, z \rangle = 0$

$$\Rightarrow x \in A^\perp$$

$x \in E$, $x \perp A$ ($x \in A^\perp$).

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} y \in A \end{cases}$$

$$E^\perp = \{0\}.$$

$$\{0\}^\perp = E.$$

$$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$$

$$|\langle I_n, A \rangle| \leq \|I_n\| \|A\|.$$

$$|\text{tr}(\frac{1}{n} I_n \cdot A)| \leq \sqrt{\text{tr}(\frac{1}{n} I_n \cdot I_n)} \|A\|.$$

$$|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{\text{tr}(I_n)} \|A\|.$$

$$|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|.$$

Exemple 1:

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$$

$$(1+x) f'(x) = \alpha (1+x)^\alpha$$

$$(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$$

d'où f est la solution unique de l'éq diff

$$(*) \quad \begin{cases} y'(x) = \frac{\alpha}{1+x} y(x) & x \in]-1, +\infty[\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $x \in]-R, R[$ une solution de (*)

d'où y vérifie (*) et $y(0) = a_0 = 1$

$$(1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n) x^n = 0$$

$$\text{d'où : } (n+1) a_{n+1} = (\alpha - n) a_n$$

$$n a_n = (\alpha - (n-1)) a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} a_{n-1}$$

puisque $\alpha \in \mathbb{R}$ tq

$$a_0 \neq 0, \alpha - (n-1) \neq 0$$

d'où $a_n \neq 0$

$$\text{d'où } \prod_{k=1}^n a_k = \frac{\prod_{k=1}^n (\alpha - (k-1))}{\prod_{k=1}^n k} a_1$$

$$\text{d'où } a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} a_0 \quad \text{avec } a_0 = 1$$

(1)

$$\text{d'où } y = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} (\alpha - k) x^n.$$

et par unicité de solution

$$(1-x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} (\alpha - k) x^n.$$

Exemple 2: $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6).$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$D_f =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[.$$

et $]-\infty, 2[$ est un voisinage de 0

$$\forall x \in]-\infty, 2[.$$

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \quad \forall x \in]-2, 2[$$

donc: $f'(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ car $-\frac{1}{3}$ et $\frac{x}{2} \in]-1, 1[.$

soit $t \in]-2, 2[.$

$$\int_0^t f'(x) dx = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{x^n}{3^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{x^n}{2^n} dx.$$

$$f(t) - f(0) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$f(t) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) t^{n+1}$$

$$f(t) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) \frac{t^n}{n} \quad \forall t \in]-2, 2[$$

②

Exercice 3:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

$$D_f = \mathbb{R}. \quad \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^4}$$

$$f'(x) = -2x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{4n+1}$$

$$\forall t \in]-1, 1[.$$

$$\int_0^t f'(x) dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^t x^{4n+1} dx$$

$$f(t) - f(0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{4n+2}}{4n+2}$$

$$f(t) = \frac{t}{4} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{4n+2}}{4n+2} \quad \forall t \in]-1, 1[$$

Exercice 4:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) dt.$$

1) Existence:

$$\geq \text{car } e^t > x$$

$$t \mapsto -\ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) \text{ est continue sur }]0, +\infty[$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) \right| \sim \frac{|x|}{e^t} \quad \text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 |x| e^t = 0 \Rightarrow \frac{|x|}{e^t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et } 2 > 1$$

$$\text{donc } t \mapsto \ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.$$

③

$$\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

ii) DSE :

$$\text{soit } x \in]-1, 1[\quad \forall t \in]0, +\infty[$$

$$-\ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{e^t}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} e^{-nt}$$

2. intégration terme à terme.

• $\forall n \geq 1$ f_n est csi intégrable sur $]0, +\infty[$.

• $\sum f_n$ converge simplement

vers f sur $]0, +\infty[$.

$$\hookrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 x^n e^{-nt} = 0$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) \in \mathbb{R}.$$

$$\text{où } f(t) = -\ln\left(1 - \frac{x}{e^t}\right) \quad \forall t \geq 0$$

$\hookrightarrow f$ est cpm sur $]0, +\infty[$.

• nature de $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{|x|^n}{n} e^{-nt} dt = \frac{|x|^n}{n} \left[\frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^{+\infty} = \frac{|x|^n}{n^2}$$

or $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est de rayon de convergence 1

d'où $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergent

donc $\sum \frac{|x|^n}{n^2}$ converge par suite $\sum u_n$ converge.

~ par T.I.T

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n} e^{-nt} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\text{d'où } \forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

• continuité ne donne pas par CVS.

• intervalle d'extensité R .

(4)

$$S:]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}.$$

$$u \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

$\hookrightarrow S$ est continue sur $]-R, R[$.

$\hookrightarrow S$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x^n)^{(k)} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n.$$

$$\hookrightarrow \frac{S^{(k)}(0)}{k!} = a_k. \quad \text{cf DSE(0).}$$

$\hookrightarrow$ s'il $\exists r \in]0, R[$ tq. $\sum a_n x^n = 0 \quad \forall x \in [0, r]$.

Alors. $a_n = 0$.

$$\hookrightarrow \int_a^b S(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n dt \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \right).$$

$$\hookrightarrow u \in]-R, R[: \quad \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \checkmark$$

cf DSE: $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tq $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$.

seul $\Rightarrow \Rightarrow \exists r > 0$ tq f est $\mathcal{C}^\infty$.

Ex: $\sum 13 \cdot 3^n$, $\sum (8n+1) 2^n$, $\sum \frac{n^3+1}{n^3+3} 8^n$.

$\hookrightarrow$ sont des fractions

rationnelles en n donc $R=1$.

Rq.

$R=S$.

$$\frac{1}{n^2 5^n}$$

est une fraction
en n ?
non.

$$d) \ln(n!) \stackrel{?}{\sim} n \ln(n).$$

$$\text{Stirling } n! \stackrel{?}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(\pi) + n \ln n \\ &\quad - n \ln(1 + o(1)) \\ &= n \ln(n) (1 + o(1)). \Rightarrow \ln(n!) \stackrel{?}{\sim} n \ln(n) \end{aligned}$$

$0 \leftarrow n \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \sum \ln(n) z^n$ et $\sum \ln(n!) z^n$ ont le m. rayon de convergence $R=1$

DSE w_1 :

$$f(x) = e^{(1+x)^2} = e^{2x} e^{x^2}$$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

! soit (b_n) définie par: $b_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = \frac{1}{n!}$

$$\text{Alors } e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

le produit de Cauchy donne:

$$\begin{aligned} f(x) &= e \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) \\ &= e \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} b_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Rq:

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1}$$

$$\begin{aligned} &= e \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^n \\ &= e \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{2^{n-2k}}{(n-2k)!} \right) x^n \end{aligned}$$

DSE $\text{arctg } x$:

$$\forall t \in]-1, 1[: \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \leadsto \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

$\forall x \in]-1, 1[:$

$$\text{arctg}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Alors $\text{arctg } x$ est DSE sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\text{arctg } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

• Pour $x \in [0, 1]$: $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$ décroissante et $\left\| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\|_{[0,1]} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$.

d'après CSSA : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ CVU sur $[0, 1]$; $\rightarrow 0$.

Alors, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est continue sur $]-1, 1[$.

Alors $\text{arctg}(x)$ continue sur $]-1, 1[$.

donc :

$$\forall x \in]-1, 1[: \text{arctg } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

en particulier ($x=1$) $\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Scanné avec CamScanner