

Chute d'un cadre dans un champ magnétique

- 1) Si $\alpha = 0$, $\vec{B}$ est uniforme ($\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$)
 Le flux de $\vec{B}$ dans le cadre est donc constant au cours de la chute.
 Il n'y a pas de phénomène d'induction.

- 2) Loi de Lenz: le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

en raisonnant par les flux

- En $z_c = 0$, le flux à travers le cadre est positif.
- Puis quand le cadre tombe, B diminue donc le flux (extérieur) diminue.
- Le courant induit va créer un flux propre positif pour modérer cette diminution du flux.

$$i > 0$$

en raisonnant par les forces de Laplace

- le cadre tombe sous l'effet de la force $m\vec{g}$, et cette chute entraîne un phénomène d'induction.
- Supposons $i > 0$, la force de Laplace sur le côté horizontal en $(z_c + \frac{a}{2})$ est $\int d\vec{F} = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}$ elle est selon $\vec{u}_z$ vers le bas.
 Sur le côté horizontal en $(z_c - \frac{a}{2})$, elle est selon $(-\vec{u}_z)$ vers le haut. Elle est plus importante que la précédente car B est plus grand.
- Donc si $i > 0$ la résultante des forces de Laplace est vers le haut.
- Les forces de Laplace, pour compenser les effets de la chute, doivent freiner, donc être vers le haut.

$$i > 0$$

3)

$$\begin{aligned}
 \phi &= \iint_{\text{cadre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 &\quad B \vec{u}_y \quad \quad dx dz \vec{u}_y \\
 &= \iint_{\text{cadre}} B \, dx \, dz \\
 &\quad x_{\text{Droite}} \quad z = z_c + a/2 \\
 &= \int_{x_{\text{Gauche}}} dx \int (B_0 - \alpha z) dz \\
 &\quad \quad \quad z = z_c - a/2 \\
 &= a \times \left[B_0 a - \frac{\alpha}{2} \left((z_c + \frac{a}{2})^2 - (z_c - \frac{a}{2})^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\phi = a^2 (B_0 - \alpha z_c)$$

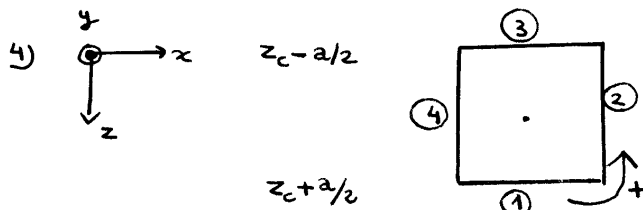
(B étant une fonction affine de z, on pourrait s'attendre à obtenir $\phi = a^2 B(z_c)$)

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

(on ne tient pas compte du flux propre)

$$e = a^2 \alpha \frac{dz_c}{dt}$$

$$e = a^2 \alpha v$$



$$\begin{aligned}
 e &= \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\
 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4
 \end{aligned}$$

Pour calculer e_2 et e_4 on fait

$$\begin{aligned}
 e &= \int (v \vec{u}_z \wedge B \vec{u}_y) dz \vec{u}_z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

puisque sur ces 2 côtés $\vec{v}$ et $d\vec{l}$ sont colinéaires.

Pour calculer $e_{(1)}$ et $e_{(2)}$ on fait

$$\begin{aligned} e &= \int (\vec{v} \vec{u}_y \wedge B(z) \vec{u}_y) dx \vec{u}_x \\ &= \int -v B(z) dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} e_{(1)} &= \int_{x_{\min}}^{x_{\min}+a} -v B(z_c + \frac{a}{2}) dx \\ &= -v B(z_c + \frac{a}{2}) a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{(2)} &= \int_{x_{\min}+a}^{x_{\min}} -v B(z_c - \frac{a}{2}) dx \\ &= +v B(z_c - \frac{a}{2}) a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= -v a (B(z_c + \frac{a}{2}) - B(z_c - \frac{a}{2})) \\ &= -v a (B_0 - \alpha(z_c + \frac{a}{2}) - B_0 + \alpha(z_c - \frac{a}{2})) \end{aligned}$$

$$e = a^2 \alpha v$$

5) Forces de Laplace

→ Pour calculer $\vec{F}_{(2)}$ et $\vec{F}_{(4)}$ on fait

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\text{côté étudié}} i d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= \int_{\text{côté étudié}} i dz \vec{u}_z \wedge B(z) \vec{u}_y \\ &= -i \left[\int B(z) dz \right] \vec{u}_x \end{aligned}$$

Pour $\vec{F}_{(4)}$ on intègre de $z_c - \frac{a}{2}$ à $z_c + \frac{a}{2}$

Pour $\vec{F}_{(2)}$ on intègre en sens inverse

$$\text{donc } \vec{F}_{(2)} + \vec{F}_{(4)} = \vec{0}$$

→ Pour calculer $\vec{F}_{\text{①}}$ et $\vec{F}_{\text{③}}$ on fait :

$$\vec{F} = \int_{\text{côté étudié}} i \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$= \int_{\text{côté étudié}} i \, dx \, \vec{u}_x \wedge B(z) \, \vec{u}_y$$

$$= i B(z) \left[\int dx \right] \vec{u}_z$$

Pour $\vec{F}_{\text{①}}$ on intègre de $x_{\min}$ à $x_{\min}+2a$

$$\vec{F}_{\text{①}} = i B\left(z_c + \frac{a}{2}\right) a \, \vec{u}_z$$

Pour $\vec{F}_{\text{③}}$ on intègre de $x_{\min}+2a$ à $x_{\min}$

$$\vec{F}_{\text{③}} = -i B\left(z_c - \frac{a}{2}\right) a \, \vec{u}_z$$

Finalement

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \vec{F}_{\text{①}} + \vec{F}_{\text{③}} \\ &= i a \underbrace{\left(B\left(z_c + \frac{a}{2}\right) - B\left(z_c - \frac{a}{2}\right) \right)}_{-a\alpha} \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_L = -i a^2 \alpha \vec{u}_z}$$

remarque:

On retrouve bien le principe de conservation électromagnétique
en champ permanent.

$$P_{\text{electrom}} + P_{\text{Laplace}} = 0$$

$$e_{\text{ext}} i + \vec{F}_L \vec{v} = 0$$

$$(a^2 \alpha v) i + (-i a^2 \alpha) v = 0$$

5) Equation mécanique :

Théorème de la résultante cinétique au cadre selon $\vec{u}_g$:

$$mg - i a^2 \alpha = m \frac{dv}{dt}$$

7) Equation électrique :

loi du circuit électrique

$$e = R i$$

$$a^2 \alpha v = R i$$

8) on élimine i entre les deux équations.

$$mg - \frac{a^2 a^4}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$$

avec :

$$\tau = \frac{m R}{a^2 a^4}$$

l'équation différentielle, en utilisant z_c , est donc :

$$\frac{d^2 z_c}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz_c}{dt} = g \quad)$$

9) Solution

$$v = A e^{-t/\tau} + v_{\text{Lim}}$$

avec :

$$v_{\text{Lim}} = \tau g$$

C.I. $0 = A + v_{\text{Lim}}$

$$v = v_{\text{Lim}} (1 - e^{-t/\tau})$$

10) A.N.

$$\tau = \frac{mR}{\alpha^2 a^4}$$

$$= \frac{0,01 \times 0,01}{(6,4)^2 (0,1)^4}$$

$$\tau = 0,024 \text{ s}$$

$$v_{\text{lim}} = \tau g$$

$$= 0,024 \times 9,8$$

$$v_{\text{lim}} = 0,24 \text{ m s}^{-1}$$

11) Au temps $t_0 = 10 \text{ s} \gg \tau$, le cadre a donc atteint la vitesse limite précédente.

On recommence l'étude :

$$\phi(t) = a^2 (B_0 - \alpha \tau_c - \beta (t - t_0))$$

$$e = - \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$e = a^2 (\alpha v + \beta)$$

$$\vec{F}_L = -i a^2 \alpha \vec{u}_y$$

(B dépend de t.

on n'a plus $e + F_L v = 0$)

l'équation mécanique n'est pas modifiée :

$$mg - i a^2 \alpha = m \frac{dv}{dt}$$

l'équation électrique est modifiée

$$a^2 (\alpha v + \beta) = R i$$

l'équation différentielle devient alors :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g - \frac{\alpha \beta a^4}{m R}$$

La vitesse limite devient

$$v'_{Lim} = \tau g - \frac{\alpha \beta a^4}{mR} \tau$$

$$v'_{Lim} = \tau g - \frac{\beta}{\alpha}$$

A.N.
$$v'_{Lim} = v_{Lim} - \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= 0,24 - \frac{0,30}{5,4}$$

$$v'_{Lim} = 0,19 \text{ m.s}^{-1}$$

La solution de l'équation est donc

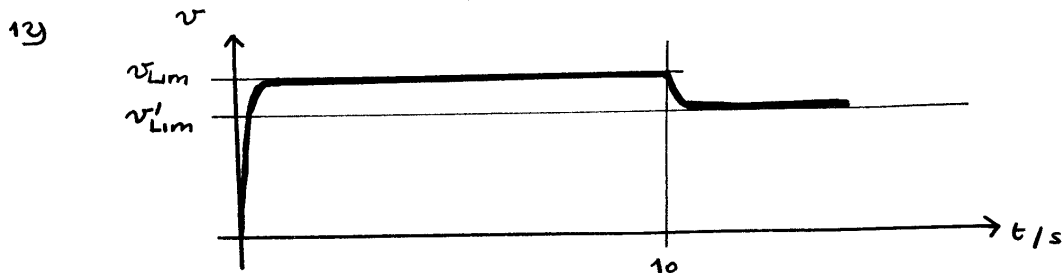
$$v = A e^{-t/\tau} + v'_{Lim}$$

C.I.
$$v_{Lim} = A e^{-t_0/\tau} + v'_{Lim}$$

donc

$$A = \frac{v_{Lim} - v'_{Lim}}{e^{-t_0/\tau}}$$

$$v = \underbrace{(v_{Lim} - v'_{Lim})}_{\frac{\beta}{\alpha} = 0,047} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \underbrace{v'_{Lim}}_{0,19}$$



Remarque

$$v'_{Lim} < v_{Lim}$$

B diminue avec g mais diminue aussi avec t

Si on ne regarde que cette diminution avec t ,

la loi de Lenz prévoit ici aussi $i > 0$ donc $F > 0$.

La force de Laplace vers le haut augmente, v_{Lim} diminue.