

# Devoir de Sciences Physiques n°1 du 13-09-2017

— Solutions —

## Problème n° 1 – Haut-parleur électrodynamique

CCP PC 2016

### A. Étude temporelle du fonctionnement

1. Le haut-parleur de convertisseur électromécanique car il reçoit de l'énergie électrique et produit une onde mécanique.

2. On utilise les coordonnées polaires et la base associée. L'élément de longueur du fil constituant la bobine est  $\vec{\ell} = r_{\text{bobine}} d\theta \vec{e}_\theta = d\ell \vec{e}_\theta$ , le champ magnétique est  $\vec{B} = B\vec{e}_r$  et la vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_z$ . On calcule le produit vectoriel :  $\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{e}_\theta$ , on peut en déduire que  $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = Bvd\ell$ . On a donc  $e = \int_{\text{bobine}} Bvd\ell$ . On trouve  $e(t) = v(t)\ell B$ .

3. La loi des mailles donne facilement  $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - e(t)$ . Avec l'expression de la force électromotrice que l'on vient de calculer, on obtient la relation attendue :  $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - B\ell v(t)$ .

4. Par définition, la force élémentaire de LAPLACE est  $d\vec{f}_L = i(t)d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(t)d\ell \vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_r$ . On obtient donc :  $d\vec{f}_L = -i(t)Bd\ell \vec{e}_z$ .

5. Dans l'expression de la relation de la Dynamique fournie, le terme  $-i(t)\ell B\vec{e}_z - kz(t)\vec{e}_z$  représente la force de LAPLACE qui s'exerce sur la totalité de la bobine,  $-kz(t)\vec{e}_z$  la force élastique de rappel de la membrane du haut-parleur. Cette force est la conséquence du fait que lorsque la bobine se déplace sous l'effet de la force de LAPLACE, elle déforme la membrane qui tend à revenir dans sa position naturelle d'équilibre. On suppose évidemment que l'on reste dans le domaine de linéarité de déformation de cette membrane. La force  $-\lambda\vec{v}$  correspond à l'interaction entre la membrane et l'air qui est un fluide qui possède une certaine viscosité même si elle n'est pas très élevée. Cette viscosité est fondamentale pour que la membrane puisse transmettre de l'énergie à l'air et donc puisse produire l'onde sonore. On notera enfin que le poids de la membrane n'intervient pas dans la relation de la Dynamique, ceci est normal parce qu'il est compensé par une force normale à l'axe  $z'z$ . Finalement l'équation différentielle mécanique est :  $m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dz}{dt} + kz = -i(t)\ell B$ .

### B. Régime sinusoïdal forcé

6. On obtient pour l'équation électrique :  $\underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} - B\ell\underline{v}$ . Pour l'équation mécanique, on travaille dans un premier temps avec  $\underline{z}$ . On passera à la vitesse ensuite avec  $\underline{v} = j\omega\underline{z}$ . On a donc :  $[(k - m\omega^2) + j\lambda\omega]\underline{z} = -B\ell\underline{i}$ .

7. On passe de la position à la vitesse comme indiqué à la question précédente. Cela permet d'écrire  $[(k - m\omega^2) + j\lambda\omega]\underline{v} = -\ell B(j\omega)\underline{i}$ . On en déduit que  $\underline{v} = -\frac{\ell B(j\omega)}{[(k - m\omega^2) + j\lambda\omega]}\underline{i}$ . On remplace cette expression de la vitesse dans l'équation électrique et on obtient l'expression  $\underline{u} = [R + jL\omega + \frac{B^2\ell^2(j\omega)}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega}]\underline{i}$ . L'impédance du haut-parleur est donc :

$$\underline{Z} = R + (j\omega) \left[ L + \frac{B^2\ell^2}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega} \right].$$

8. On a  $\underline{Z}_e = R + jL\omega$  et  $\underline{Z}_m = \frac{B^2\ell^2(j\omega)}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega}$ .

9. On peut raisonner sur l'admittance motionnelle  $\underline{Y}_m = \frac{1}{B^2\ell^2} \frac{k + \lambda(j\omega) + m(j\omega)^2}{j\omega}$ . En factorisant, on arrive à  $\underline{Y}_m = \frac{\lambda}{B^2\ell^2} + \frac{m}{B^2\ell^2}(j\omega) + \frac{k}{B^2\ell^2} \frac{1}{(j\omega)}$ . Cette expression correspond bien à la forme  $\underline{Y}_m(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}_m(\omega)} = jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega} + \frac{1}{R_m}$  à condition de poser  $R_m = \frac{B^2\ell^2}{\lambda}$ ,  $C_m = \frac{m}{B^2\ell^2}$  et  $L_m = \frac{B^2\ell^2}{k}$ . Les applications numériques conduisent bien à :  $C_m = 250 \mu\text{F}$ ,  $L_m = 12,8 \text{ mH}$  et  $R_m = 16 \Omega$ .

10. Les règles d'association des admittances nous disent que des admittances en parallèle s'ajoutent pour constituer une admittance équivalente. Les trois éléments électriques caractérisés par  $R_m$ ,  $L_m$  et  $C_m$  sont donc associés en parallèle. La représentation du schéma équivalent du haut-parleur est fourni à la figure 1.

11. On a posé  $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{\underline{Y}_m} = R + jL\omega + \frac{R_m}{1 + jR_m(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})}$ . On multiplie par le complexe conjugué au niveau de l'impédance motionnelle et on obtient alors  $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{R_m(1 - jR_m(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}))}{1 + R_m^2(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega})^2}$ . En séparant

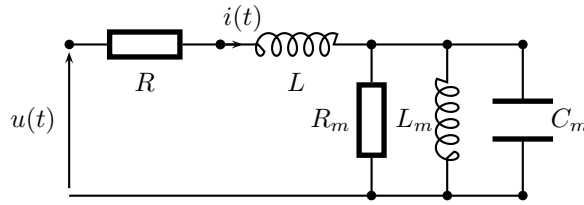


FIGURE 1 – Modélisation électrique complète du haut-parleur

les parties réelle et imaginaire, on arrive effectivement à l'expression demandée pour la résistance équivalente (partie réelle) :  $R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2 (C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega})^2}$ . La partie imaginaire est  $X_T = j\omega \frac{L - R_m^2 (C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega})}{1 + R_m^2 (C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega})^2}$ .

12. En utilisant l'expression précédente, on voit que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} R_T = R$ . En regardant le graphique proposé, on trouve donc que  $R = 8 \Omega$ . La résonance se produit pour  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}$ . Sur le graphique, on trouve que  $\omega_0 \simeq 560 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Comme on a  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , on trouve bien que  $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}} = 89 \text{ Hz}$ .

### C. Étude énergétique

13. L'équation électrique est  $u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - B\ell v(t)$ . Pour passer à la puissance, il faut multiplier par  $i(t)$ . On obtient alors  $u(t)i(t) = Ri^2(t) + Li \frac{di}{dt} - B\ell v(t)i(t)$ . Avec  $Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$ , on arrive bien à la forme donnée par l'énoncé  $u(t)i(t) = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt} + P_J(i(t)) + P_L(v(t))$  avec l'énergie magnétique stockée dans la bobine  $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2(t)$ , la puissance dissipée par effet JOULE  $P_J(t) = Ri^2(t)$  et la puissance de la force de LAPLACE  $P_L(t) = -i(t)B\ell v(t) = \vec{f}_L \cdot \vec{v}$ . Quant à  $u(t)i(t)$  c'est la puissance fournie par le générateur qui alimente le haut-parleur.

14. Pour établir le bilan de puissance mécanique, on multiplie l'équation obtenue par la relation fondamentale de la Dynamique par la vitesse  $v(t)$ . On a donc  $m \frac{dv}{dt} v + \lambda v^2 + kz \frac{dz}{dt} = -i(t)B\ell v(t) = P_L(t)$ . En utilisant le fait que  $m \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$  et  $kz \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kz^2)$ , on arrive à la forme proposée avec  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  qui représente l'énergie cinétique du mobile,  $E_{pe} = \frac{1}{2}kz^2$  qui représente l'énergie potentielle élastique du haut-parleur et enfin  $P_A(t) = \lambda v^2$  qui est la puissance fournie à l'air, puissance qui sert à former l'onde sonore émise par le haut-parleur.

15. La puissance de la force de LAPLACE figure dans les deux bilans de puissance, c'est justement ce qui permet de comprendre la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique ou bien le contraire en fonction du dispositif construit. On peut l'éliminer et obtient aussitôt l'équation  $u(t)i(t) = \frac{dE_{\text{magn}}}{dt} + P_J(i(t)) + \frac{dE_M(t)}{dt} + P_A(v(t))$  où  $E_M = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kz^2(t)$  représente l'énergie mécanique du mobile.

16. Commençons par rappeler la définition d'une moyenne pour un signal périodique sur la puissance moyenne  $\langle P_S(t) \rangle$  fournie par l'alimentation électrique :  $\langle P_S(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_S(t) dt$ . Dans l'équation bilan de puissance que nous avons établi à la question précédente, on doit calculer des moyennes de dérivées. Prenons l'exemple de l'énergie magnétique. On a  $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{di}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} di(t) = \frac{1}{T} (i(t_0 + T) - i(t_0)) = 0$  car le signal est périodique et car alors  $i(t_0 + T) = i(t_0)$ . Lors du calcul de la moyenne, tous les termes faisant intervenir une dérivée vont s'annuler, il ne reste plus que les autres termes. c'est pourquoi, on arrive à l'équation :  $\langle P_S(t) \rangle = R \langle i^2(t) \rangle + \lambda \langle v^2(t) \rangle$ . Le terme utile est celui qui est responsable de la mise en mouvement de l'air, c'est donc le terme  $\langle P_u(t) \rangle = \lambda \langle v^2(t) \rangle$ . Le rendement correspond à la puissance utile rapportée à la puissance coûteuse à savoir la puissance fournie par le générateur qui alimente le haut-parleur. On a donc  $\eta = \frac{\lambda \langle v^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle} = \frac{\langle P_A(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle}$ .

17. On sait que  $\langle P_A(t) \rangle = \langle P_S(t) \rangle - \langle Ri^2(t) \rangle$  puisqu'il faut retirer l'effet JOULE. On a donc :  $\eta = 1 - \frac{R \langle i^2(t) \rangle}{\langle P_S(t) \rangle}$ . Le haut-parleur est modélisé par l'équation  $u(t) = R_T i(t) + L_T \frac{di}{dt}$ . Multiplions par  $i(t)$ , on a donc  $u(t)i(t) = R_T i^2(t) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}L_T i^2)$ . Lorsque l'on calcule la moyenne, on obtient comme dans le précédent calcul  $\langle u(t)i(t) \rangle = R_T \langle i^2(t) \rangle$  car le terme en dérivée ne contribue pas à la moyenne. On en déduit donc que  $\eta = 1 - \frac{R}{R_T}$ .

18. Le rendement est maximal lorsque la résistance  $R_T$  est maximale. Cela se produit lorsque  $f = f_0$ , la résistance  $R_T$  vaut alors  $R_T = R + R_m$ . Le rendement est donc  $\eta(\omega_0) = 1 - \frac{R}{R + R_m} = \frac{R_m}{R + R_m}$ . L'application numérique donne  $\eta_{\text{max}} = \frac{2}{3} = 0,67$ . Cette valeur correspond bien au graphique proposé.

19. L'utilisation du haut-parleur est intéressante dans sa bande passante. C'est ici autour de la fréquence de  $89 \text{ Hz}$ , sinon le rendement décroît assez vite. L'oreille humaine entend les sons de fréquence comprise entre  $f_b = 20 \text{ Hz}$  et  $f_h = 20 \text{ kHz}$ .

20. Chaque haut-parleur va présenter une bande passante de taille inférieure à l'intervalle  $f_h - f_b = \Delta f$ . On

ne peut pas trouver un haut-parleur universel de qualité, c'est-à-dire de bande passante très large et plat sans résonance. Il faut donc utiliser plusieurs haut-parleurs pour obtenir par **recouvrement** des bandes passantes, le rendu le plus homogène possible du signal riche en fréquences qui constituent la musique que l'on veut écouter.

## Problème n° 2 – Quelques aspects de la mesure du temps X MP 2011

Extraits de ce sujet.

### A. Horloge à quartz

1. On trouve une pulsation série  $\omega_s = 2 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  donc une fréquence  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 32,8 \text{ kHz}$ . La pulsation parallèle est  $\omega_p = \omega_s(1 + 10^{-3})$  et le facteur de qualité très élevé  **$Q = 5 \times 10^4$** .

2. Dans le cas où  $R_1 = 0$ , la réactance  $X(x) = -\frac{1}{C_0\omega_s} \frac{1}{x} \left( \frac{1-x^2}{a^2-x^2} \right)$  est représentée sur le graphique de la figure 2. On a un effet de condensateur lorsque  $X(x) < 0$ , c'est-à-dire pour  $0 < x < 1$  et pour  $x > a$ . Le circuit se comporte comme une bobine lorsque  $1 < x < a$ . Enfin, le circuit est un fil court-circuit lorsque  $x = 1$ . On peut aussi dire que le circuit est un interrupteur ouvert lorsque  $x = a$  car l'impédance imaginaire est infinie.

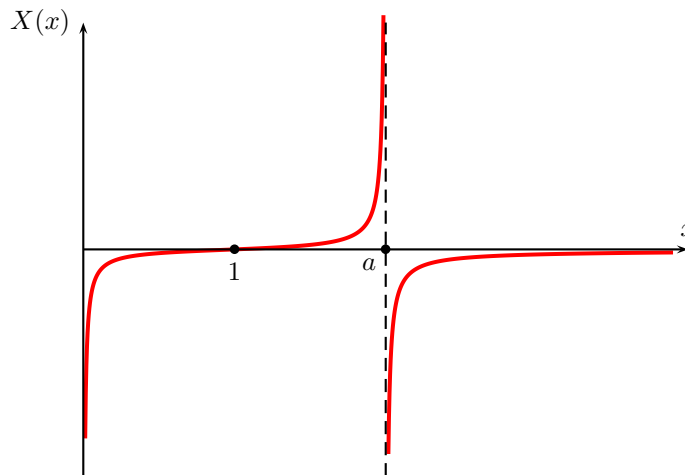


FIGURE 2 – Réactance du quartz piézoélectrique

3. Il s'agit de l'association série de  $R_1$  et de  $L_1$ . En effet l'impédance de l'ensemble est  $\underline{Z}_1 = R_1 + jL_1\omega = jL\omega$ . On en déduit effectivement un coefficient d'autoinductance  **$L = L_1 + \frac{R_1}{j\omega}$** .

4. L'énoncé nous donne  $Z(\omega_s) = \frac{R_1}{1+j\frac{C_0}{Q\omega_s}}$  et  $Z(\omega_p) \simeq \frac{R_1}{R_1^2 C_0^2 \omega_s^2}$ . On peut prévoir que la partie réelle de l'impédance est positive à cause des pertes énergétiques provoquées par la résistance  $R_1$ , cela correspond aussi à l'expression  $Z(\omega_p)$  donnée avant. On vérifie en outre que la valeur de l'impédance est de l'ordre de  $340 \text{ M}\Omega$  ce qui correspond effectivement aux  $327 \text{ M}\Omega$  annoncés par le sujet. La courbe en **pointillés est donc  $\Re(\underline{Z})$**  et la courbe en trait plein la partie imaginaire  $\Im(\underline{Z})$ . On constate que la partie imaginaire de l'impédance s'annule comme dans le cas d'une résonance d'intensité en circuit  $RLC$  série. Ici, la situation est pourtant différente, on peut parler d'antirésonance puisque l'impédance passe par un maximum. Le facteur de qualité correspond bien à ce que l'on définit habituellement. On peut constater sur le graphique que la largeur indiquée de  $\frac{1}{Q}$  correspond bien à un intervalle de fréquence tel qu'on pouvait s'y attendre à savoir celui pour lequel  $Z(\omega_p)/2 < \Re(\underline{Z}) < Z(\omega_p)$ .

5. Le graphique propose d'étudier  $Z(x)/Z(a)^1$  puisqu'en  $x = a = 1,001$ , ce rapport vaut 1. On constate qu'en  $x = 1$ , donc pour  $f = f_s$ , on a  $Z(\omega_s) = 10^{-4}Z(\omega_p)$ . L'impédance à cette pulsation est la plus faible. Pour une tension donnée, le courant électrique qui circulera sera donc le plus important. On travaille à une fréquence  $f_s = 32\,768 \text{ Hz}$  car cette fréquence correspond à une puissance de 2. On a  **$32\,768 = 2^{15}$** . Ceci permet de faire agir ensuite sur la tension de départ, 15 circuits électroniques qui divisent la fréquence du signal par 2 et de venir sur  $1 \text{ Hz}$  qui correspond à une période de  $1 \text{ s}$ .

6. On a  $\frac{\Delta f_0}{f_0} = -4 \times 10^{-6}$ . Cela permet d'en déduire que  $\frac{\delta t}{\Delta t} = +4 \times 10^{-6}$ . La fréquence diminue, la période augmente. On peut calculer ainsi que la montre **retarde de 2 minutes** par an.

1. L'énoncé indiquait par erreur que le graphique représentait  $Z(x)/Z(1)$ .