

A Expérience de Stern et Gerlach

L'expérience de Stern et Gerlach réalisée en 1922 est historiquement fondamentale car elle a permis de mettre en évidence la quantification du moment cinétique intrinsèque (dit de spin) de l'atome. Nous allons en examiner différents aspects.

Document A1 - Expérience de Stern et Gerlach

En 1922, Stern et Gerlach ont mesuré les valeurs du moment magnétique dipolaire des atomes d'argent avec le dispositif de la **figure A1** représenté ci-dessous :

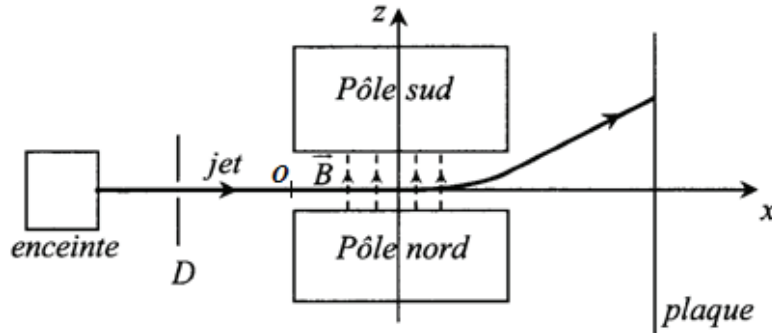


Figure A1

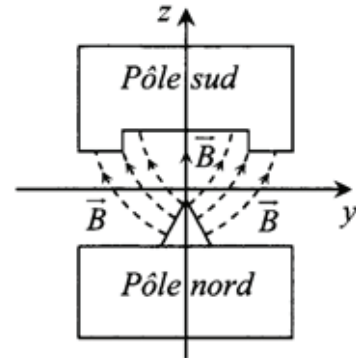


Figure A2

Tout le dispositif est placé dans un vide poussé où règne une pression inférieure au millipascal. Des atomes d'argent s'échappent par un petit orifice de l'enceinte (la source) chauffée à haute température. Ils se déplacent en ligne droite jusqu'à une fente (D) qui sélectionne les atomes qui ont une vitesse parallèle à l'axe des x.

Le jet atomique pénètre alors dans l'entrefer d'un électroaimant dont la forme est choisie pour que le champ magnétique ne soit pas uniforme. L'allure des lignes de champ magnétique dans le plan (yOz) est donnée sur la **figure A2**.

Le jet atomique est dévié par ce champ inhomogène. Quand il sort de l'électroaimant, il continue en ligne droite jusqu'à un écran où sont repérés les impacts des atomes.

La **figure A3** donne le résultat attendu par la mécanique classique ainsi que le résultat obtenu expérimentalement :

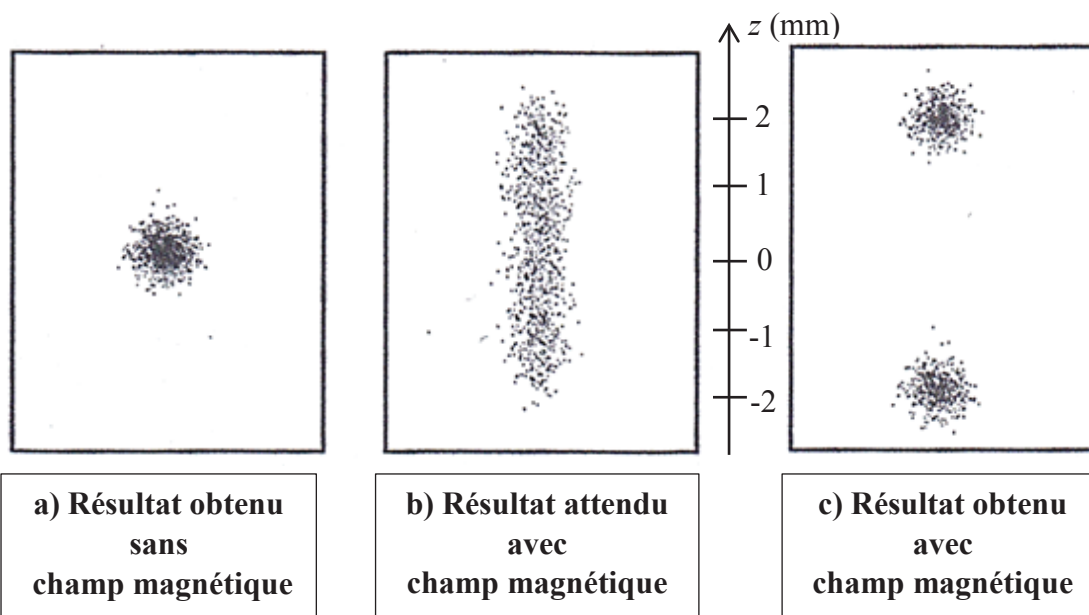


Figure A3 - Image obtenue à l'aide d'un microscope de grossissement x 20

Document A2 - Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé par Stern et Gerlach est représenté **figure A4** (dans un souci de lisibilité, l'échelle et les proportions n'ont pas été respectées) :

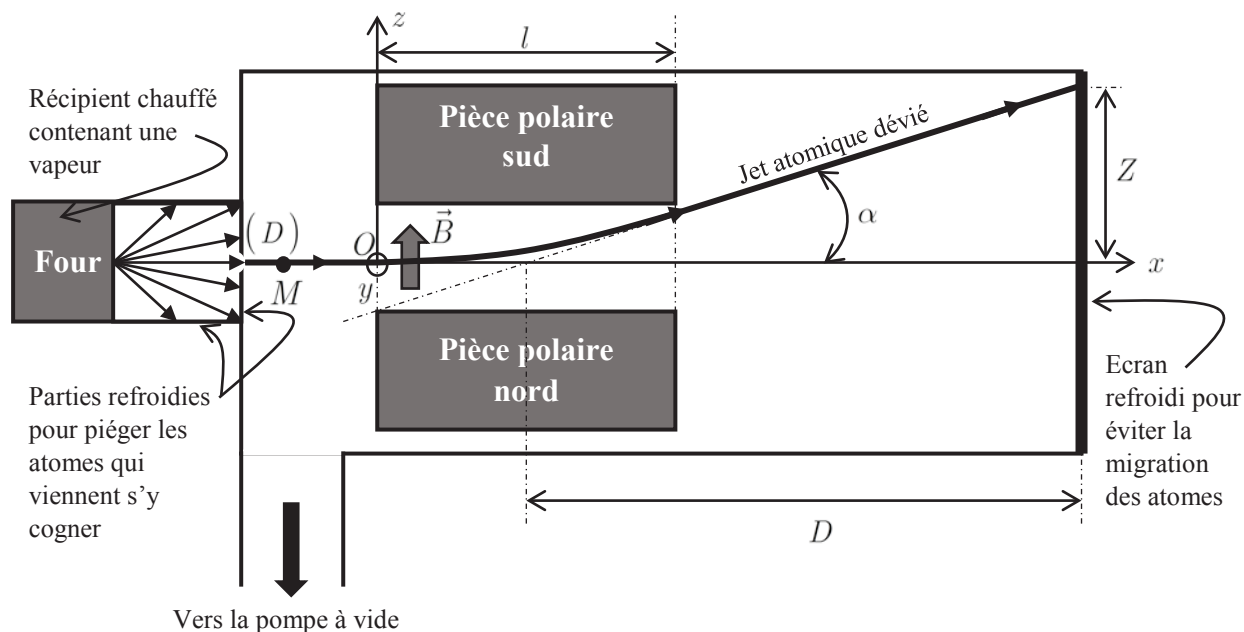


Figure A4 - Vue en coupe de l'enceinte

Caractéristiques :

Taille de la fente (D) d'entrée : $b = 1 \text{ mm}$

Longueur de l'électroaimant : $l = 3,5 \text{ cm}$

Distance entre le milieu de l'électroaimant et l'écran : $D = 1,8 \text{ cm}$

Pression dans l'enceinte : $P = 1,0 \text{ mPa}$

Température du jet à la sortie du four : $T = 1\,270 \text{ K}$

Gradient de champ magnétique : $\frac{dB}{dz} = 500 \text{ T.m}^{-1}$

Document A3 – Données

Atome d'argent :

- configuration électronique :

$$Ag(Z = 47) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 4d^{10} 5s^1$$

- masse molaire : $M_{Ag} = 108 \text{ g.mol}^{-1}$
- rayon atomique : $r_{Ag} = 160 \text{ pm}$

Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$

Masse d'un l'électron : $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = \mathcal{N}_A k_B = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34} \text{ J.s}$

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,8.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Accélération de la pesanteur : $g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$

Energie cinétique d'agitation thermique d'une particule de gaz parfait monoatomique : $e_c^* = \frac{3}{2} k_B T$

On négligera l'effet de la pesanteur devant toutes les autres forces en présence.

I. Analyse du jet d'atomes d'argent

Les atomes d'argent présents dans le four se vaporisent et le jet de gaz obtenu en sortie se comporte comme un gaz parfait monoatomique à la température T . On supposera que les atomes ont alors tous la même énergie cinétique (jet monocinétique).

Q.1 Montrer que la masse d'un atome d'argent s'écrit $m_{Ag} = \frac{M_{Ag}}{\mathcal{N}_A}$. En déduire que la vitesse

quadratique moyenne des atomes d'argent s'écrit : $v_0 = \sqrt{\frac{3RT}{M_{Ag}}}$. Calculer cette vitesse.

Q.2 En considérant la dualité onde-corpuscule, en déduire la longueur d'onde de De Broglie correspondante. Comparer à la taille de la fente d'entrée (D) et conclure.

Q.3 Exprimer la densité volumique de particules d'argent n^* du jet, une fois celui-ci dans l'enceinte, en fonction de la pression dans l'enceinte P , de la température T et de la constante de Boltzmann k_B . Calculer cette densité.

Q.4 On désigne par libre parcours moyen la distance que parcourt un atome entre deux collisions. La physique statistique nous donne une expression simple de ce libre parcours moyen :

$\ell^* = \frac{1}{4\pi r_0 n^*}$ avec r_0 le rayon de l'atome. Calculer le libre parcours moyen des atomes d'argent. Conclure quant à la validité du modèle du gaz parfait dans ce cas.

II. Analyse de la déflexion magnétique

Dans cette partie, on souhaite interpréter les résultats obtenus et les comparer aux résultats attendus par la mécanique classique (**figure A3**).

Les atomes d'argent sont porteurs d'un moment magnétique noté $\vec{m}$ dont la norme est du même ordre de grandeur que celle du magnéton de Bohr μ_B associé à l'atome d'hydrogène.

II.1. Magnéton de Bohr

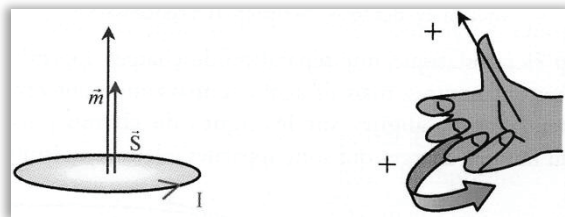
Document A4 - Propriétés des dipôles magnétiques

Un dipôle magnétique est caractérisé par son **moment magnétique** $\vec{m}$. Pour une spire de courant, ce moment magnétique s'écrit :

$$\vec{m} = I \vec{S}.$$

Plongé dans un champ magnétique, le dipôle magnétique subit au premier ordre un couple

$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ et possède une énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$.



Le modèle de Bohr est une description semi-classique de l'atome d'hydrogène. Dans ce modèle, l'électron est en orbite circulaire uniforme de rayon $R_H = 53 \text{ pm}$, d'axe Δ autour d'un proton comme indiqué sur la **figure A5**. Ce proton est fixe et placé au centre O du référentiel d'étude supposé galiléen et associé aux coordonnées polaires (r, θ) . L'électron, supposé non relativiste, possède une charge $-e$ et une masse m_e .

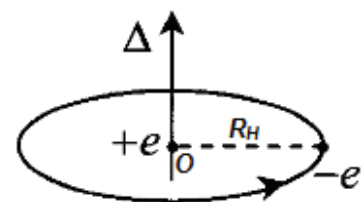


Figure A5

Q.5 Rappeler l'expression de la force électrostatique exercée par le proton sur l'électron. Justifier que l'action de la pesanteur puisse être négligée.

Q.6 Montrer que la vitesse angulaire de l'électron s'écrit : $\omega = \frac{e}{2\sqrt{\pi m_e \varepsilon_0 R_H^3}}$.

Q.7 Calculer la période du mouvement de l'électron T .

Q.8 On assimile l'effet magnétique du mouvement de l'électron autour du proton à celui d'un courant I circulant dans une spire circulaire. Exprimer I pour cette boucle en fonction de e et de ω .

Q.9 En déduire l'expression du moment magnétique $\vec{m}$ associé à cette boucle de courant en fonction de e , ω , R et $\vec{e}_\Delta$, vecteur unitaire associé à l'axe Δ .

Q.10 Montrer alors que le moment magnétique peut s'écrire : $\vec{m} = \gamma \vec{L}$, avec $\vec{L}$ le moment cinétique de l'électron par rapport au point O et γ le rapport gyromagnétique. On donnera l'expression de γ en fonction de e et de m_e .

Q.11 L'hypothèse de Planck, confirmée ensuite par la mécanique quantique, consiste à poser $\|\vec{L}\| = n\hbar$ où n est un entier positif et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, constante de Planck réduite. Le magnéton de Bohr μ_B est la norme du moment magnétique de l'électron dans son état fondamental, correspondant à $n = 1$. Donner son expression en fonction de e , $\hbar$ et de m_e . Calculer μ_B .

II.2. Cas d'un champ magnétique uniforme dans l'entrefer

On suppose tout d'abord que l'électroaimant produit un champ uniforme dans l'entrefer $\vec{B} = B\vec{e}_z$ vertical qui ne perturbe pas l'orbite des électrons. On prendra $B \simeq 1 \text{ T}$.

On supposera que l'axe Δ portant le moment magnétique des atomes d'argent fait un angle θ constant avec (Oz) tel que $\widehat{(\vec{B}; \vec{m})} = \theta$ comme indiqué **figure A6**.

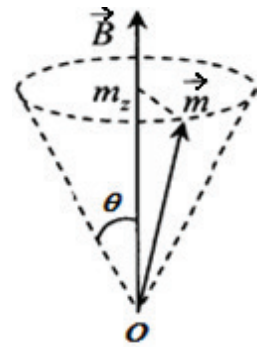


Figure A6

Le moment magnétique d'un atome d'argent s'écrit toujours : $\vec{m} = \gamma \vec{L}$, où $\vec{L}$ est ici le moment cinétique résultant de l'atome par rapport au point O .

Q.12 En appliquant le théorème du moment cinétique à l'atome, exprimer l'équation différentielle vérifiée par $\vec{m}$ et montrer que : $\frac{dm_z}{dt} = 0$ et que : $\frac{d}{dt}\left(\frac{m^2}{2}\right) = 0$ où m_z représente la composante de $\vec{m}$ selon l'axe (Oz) et m la norme du vecteur $\vec{m}$.

Q.13 Justifier que l'extrémité de $\vec{m}$ tourne donc autour de (Oz) en décrivant un cercle avec une pulsation $\Omega_L = \frac{eB}{2m_e}$, dite pulsation de Larmor.

Q.14 Evaluer la période de rotation T_L de $\vec{m}$ autour de $\vec{B}$ ainsi que le temps de trajet τ dans l'entrefer à l'aide de la **question Q.1** et des données.

Justifier alors que la composante m_z peut être considérée comme uniforme et que les composantes m_x et m_y perpendiculaires au champ peuvent être considérées en moyenne comme nulles pendant la durée de traversée dans l'entrefer.

Q.15 Calculer la force subie par les atomes dans l'entrefer et justifier qu'un champ uniforme ne peut être responsable de la déviation des atomes dans l'entrefer. On rappelle que pour une force conservative $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.

II.3. Cas d'un champ magnétique non uniforme dans l'entrefer

On considère cette fois les conditions expérimentales dans lesquelles un champ non uniforme $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ est présent dans l'entrefer de l'électroaimant dont la vue en coupe est fournie **figure A2**. On supposera que la composante m_z du moment magnétique des atomes reste toujours uniforme dans l'espace et dans le temps.

Q.16 Traduire l'expression suivante : « le champ magnétique est à flux conservatif ».

Q.17 En analysant l'allure des lignes de champs dans l'entrefer, le champ est-il plus intense au niveau du pôle nord ou du pôle sud ? En déduire le sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(B_z)$.

Q.18 Montrer que la force subie par les atomes s'écrit simplement $\vec{F} = m_z \frac{dB_z}{dz} \vec{e}_z$.

Evaluer l'ordre de grandeur de cette force.

Q.19 Justifier le résultat attendu par la mécanique classique (**figure A3b**)

Un atome d'argent de masse m_{Ag} (repéré par le point M sur la **figure A4**) entre dans la zone où règne le champ magnétique avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ au point d'origine O du repère cartésien (O, x, y, z) .

Q.20 Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ puis montrer que l'équation de la trajectoire

$$\text{s'écrit : } z(x) = \frac{m_z}{2m_{Ag}v_0^2} \frac{dB_z}{dz} x^2.$$

Q.21 Justifier que pour $x > \ell$, les atomes d'argent suivent une trajectoire rectiligne jusqu'à l'écran. Montrer que la pente a de cette trajectoire s'écrit $a = \frac{m_z}{m_{Ag}v_0^2} \frac{dB_z}{dz} l$.

Q.22 En déduire que la déflexion Z (**figure A4**) sur l'écran s'écrit :

$$Z = D \frac{m_z}{3k_B T} \frac{dB_z}{dz} l.$$

Q.23 A l'aide de la **figure A3c**, déterminer les deux valeurs des déflexions puis les deux valeurs possibles de m_z . Comparer au magnéton de Bohr.

Q.24 En analysant la configuration électronique de l'atome d'argent, combien d'électrons célibataires contient-il ? En admettant que seuls les électrons de valence participent au moment magnétique de l'atome, conclure quant au résultat de la **question Q.23**.

Q.25 Quelle propriété quantique du moment cinétique de l'atome l'expérience de Stern et Gerlach a-t-elle pu révéler en 1922 ?

Fin du problème A