

PARTIE B - ÉLECTROMAGNÉTISME

I – Préliminaires

I.1. Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

I.1.1 Le théorème de superposition conduit, après calculs, à $\vec{B}_R = \vec{B}_a + \vec{B}_M = B_a \left(-\frac{3R^3}{2r^3} \cos\theta \vec{e}_r + \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{e}_z \right)$

I.1.2. $\vec{B}_R \cdot r\vec{e}_r = \vec{B}_a + \vec{B}_M = rB_a \left(-\frac{3R^3}{2r^3} \cos\theta + \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r \right)$. Comme $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos\theta$, il vient immédiatement

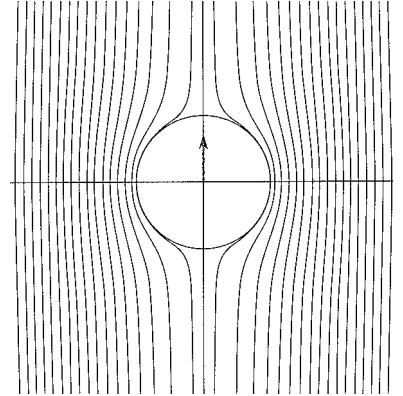
$$\vec{B}_R \cdot r\vec{e}_r = rB_a \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta$$

I.1.3. Pour $r = R$, $\vec{B}_R \cdot r\vec{e}_r = 0$. Le champ $\vec{B}_R$ est donc perpendiculaire à $\vec{e}_r$, soit tangent à la sphère de rayon R .

Au niveau de la sphère, en coordonnées cartésiennes, $\vec{B}_R = \frac{3}{2} B_a (-\sin\theta \cos\theta \vec{e}_x + \sin^2\theta \vec{e}_z)$. Le module de $\vec{B}_R$ vaut donc

$$\|\vec{B}_R\| = \frac{3}{2} B_a \sin\theta : \text{il est maximal pour } \theta = \pi/2.$$

I.1.4. Loin de la sphère, le champ est uniforme et donc les lignes de champ sont des droites parallèles. Au niveau de la sphère, le champ est tangent à la sphère, ce qui conduit à des lignes de champ qui épousent la forme de la sphère. D'où l'allure des lignes de champ représentées ci-contre.



I.2. Moment magnétique d'une distribution sphérique de courant

I.2.1. La distribution est indépendante de φ , et comme la distribution de courant est selon le vecteur de base $\vec{e}_\varphi$, l'axe Oz est un axe d'antisymétrie pour la distribution de courant. En tout point de cet axe, le champ magnétique sera porté par cet axe et donc $\vec{B}(O) = B(O) \cdot \vec{e}_z$

I.2.2. La loi de Biot et Savart s'écrit $d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} (\vec{J}_s dS \wedge \vec{e}_{PO})$ avec $\vec{e}_{PO} = -\vec{e}_r$ et $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

$$d\vec{B}(O) = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} (J_0 \sin\theta \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi) \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} (J_0 \sin\theta \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi) \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{B}(O) \cdot \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi} (\sin^2\theta d\theta d\varphi) \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} (\sin^3\theta d\theta d\varphi). \text{ On aura ainsi } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \vec{e}_z,$$

$$\text{soit } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} 2\pi \frac{4}{3} \vec{e}_z \text{ et donc } \vec{B}(O) = \frac{2}{3} \mu_0 J_0 \vec{e}_z$$

I.2.3. Entre θ et $\theta + d\theta$, on peut définir un élément de courant dI tel que $dI \cdot 2\pi R \sin\theta = J_0 \sin\theta \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$, soit $dI = J_0 R \sin\theta d\theta$. Par définition, le moment dipolaire s'écrit $d\vec{M} = dI \cdot S \cdot \vec{e}_z$, soit :

$$d\vec{M} = J_0 R \sin\theta d\theta \cdot \pi (R \sin\theta)^2 \cdot \vec{e}_z \text{ et donc } d\vec{M} = \pi J_0 R^3 \sin^3\theta d\theta \vec{e}_z$$

I.2.4. Le moment magnétique total s'écrit $\vec{M}_s = \pi J_0 R^3 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \vec{e}_z$, soit $\vec{M}_s = \frac{4}{3} \pi R^3 J_0 \vec{e}_z$

II – Sphère supraconductrice dans un champ magnétique

II.1. Propriétés du courant et du champ. Conséquences

→
II.1.1. L'équation de Maxwell-Ampère est $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. En régime stationnaire, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. Le

champ à l'intérieur est tel que $\vec{B} = \vec{0}$. On a donc $\vec{j}_v = \vec{0}$

II.1.2.a. La relation générale de passage pour $\vec{B} = \vec{0}$ est $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12}$, ce qui donne $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \vec{n}_{12} = (\mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12}) \vec{n}_{12} = \vec{0}$, soit $\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = \vec{0}$

II.1.2.b. Comme le champ magnétique est nul à l'intérieur de la sphère, la composante normale est nulle à l'intérieur et donc aussi à l'extérieur. Il ne reste que la composante tangentielle à l'extérieur : $\vec{B}_2$ est tangent à la sphère.

II.1.2.c. Pour le champ électrique, $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ conduit à la continuité de la composante tangentielle. A

l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique est nul et donc le champ extérieur aura une composante tangentielle nulle. Le champ électrique est normal à la surface.

II.1.3.a. $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12}$ et comme $\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = \vec{0}$, il vient immédiatement $\vec{B}_{t2} - \vec{B}_{t1} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12}$

II.1.3.b. La relation précédente permet d'obtenir $B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s$ et donc on a $\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_2$

II.1.3.c. Le théorème de Coulomb traduit la discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface, soit

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

II.1.4. On a obtenu $\vec{B}_R = \vec{B}_a + \vec{B}_M = B_a \left(-\frac{3R^3}{2r^3} \cos \theta \vec{e}_r + \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{e}_z \right)$.

Pour $r = R$, $\vec{B}_R(R) = B_a \left(-\frac{3}{2} \cos \theta \vec{e}_r + \frac{3}{2} \vec{e}_z \right) = \frac{3}{2} B_a (-\cos \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = -\frac{3}{2} B_a \sin \theta \vec{e}_\theta$. On obtient donc $\vec{B}_2 = -\frac{3}{2} B_a \sin \theta \vec{e}_\theta = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{e}_r$.

Comme $\vec{e}_r \wedge (\vec{J}_s \wedge \vec{e}_r) = \vec{J}_s - (\vec{e}_r \cdot \vec{J}_s) \vec{e}_r = \vec{J}_s$, $-\frac{3}{2} B_a \sin \theta (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = \mu_0 \vec{e}_r \wedge (\vec{J}_s \wedge \vec{e}_r) = \mu_0 \vec{J}_s = -\frac{3}{2} B_a \sin \theta \vec{e}_\phi$, ce

qui donne $\vec{J}_s = -\frac{3B_a \sin \theta}{2\mu_0} \vec{e}_\phi$

II.1.5. On obtient $\vec{B}(O) = \frac{2}{3} \mu_0 J_0 \vec{e}_z = \vec{B}_{\text{int}} = \frac{2}{3} \mu_0 \left(-\frac{3B_a}{2\mu_0} \right) \vec{e}_z = -B_a \vec{e}_z$: le champ total est bien nul à l'intérieur de la sphère.

II.1.6. $J_s(R, \pi/2) = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A.m}^{-1}$.

II.1.7. $\vec{M}_s = \frac{4}{3} \pi R^3 J_0 \cdot \vec{e}_z = -\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{3B_a}{2\mu_0} \vec{e}_z$ d'où $\vec{M}_s = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} B_a \vec{e}_z$. $\|\vec{M}_s\| = \frac{2\pi 10^{-6}}{4\pi 10^{-7}} = 5,0 \text{ Am}^2$

II.2. Rupture de supraconductivité. État intermédiaire.

II.2.1. $\|\vec{B}_R(R)\| = \frac{3}{2} B_a \sin \theta$ est maximal pour $\theta = \pi/2$: la supraconductivité cesse en premier au niveau du cercle équatorial.

II.2.2. $\vec{J}_s = -\frac{3B_a \sin \theta}{2\mu_0} \vec{e}_\phi$ vaut, pour $\theta = \pi/2$, $\vec{J}_s = -\frac{3B_a}{2\mu_0} \vec{e}_\phi$ de module $J_c = \frac{B_c}{\mu_0} = 9,94 \cdot 10^6 \text{ A.m}^{-2}$

II.2.3. $\vec{B}_R(R) = -\frac{3}{2} B_a \sin \theta \vec{e}_\theta$. Pour $\theta = \pi/2$, $\vec{B}_R(R) = -\frac{3}{2} B_a \vec{e}_\theta$ et donc on veut $B_{\text{max}} = 3/2 \cdot B_1$. On applique un champ maximal $B_1 = 2/3 \cdot B_c = 8,33 \text{ T}$.

II.2.4. et II.2.5. Cette question et la suivante semblent difficiles à résoudre sans information complémentaire. On pourra trouver celles-ci sur le site <http://www.lpm.u-nancy.fr/webperso/mangin.p/ch-3-champ-cri.pdf>, ce qui conduit aux conclusions suivantes :

$B_a < 2/3 B_c$: la sphère est totalement supraconductrice.

$2/3 B_c < B_a < B_c$: la sphère est partiellement supraconductrice.

$B_c < B_a$: la sphère est totalement à l'état normal.

II.3.Lévitation magnétique.

II.3.1. Pour une couronne située entre θ et $\theta + d\theta$, elle se comporte comme une spire parcourue par un courant dI tel que $2\pi R \sin\theta \cdot dI = J_s 2\pi R^2 \sin\theta \cdot d\theta$, soit $dI = J_s R d\theta$. La force élémentaire de Laplace s'écrit

$$\overrightarrow{d^2\vec{F}} = dI \cdot d\vec{OM} \wedge \vec{B}_a \text{ et donc sur la couronne } \overrightarrow{d\vec{F}} = dI \oint_{\text{couronne}} d\vec{OM} \wedge \vec{B}_a. \text{ Comme } \oint_{\text{Couronne}} d\vec{OM} = \vec{0}, \text{ il est clair}$$

que la force qui agit sur une couronne est nulle et donc la force qui agit sur la sphère placée dans un champ magnétique uniforme est nulle.

II.3.2. $d\varepsilon_{pm} = -d\vec{M}_s \cdot \vec{B}_a = -(-Kd\vec{B}_a) \cdot \vec{B}_a$ d'où $\boxed{\varepsilon_{pm} = \frac{1}{2} K \vec{B}_a^2 + cste}$

II.3.3. L'équilibre est stable lorsque l'énergie potentielle est minimale : la sphère se déplacera dans la zone de champ de module faible.