

Réponses

Lévitaiton par interaction magnétostatique

1) Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance

2) Juste avant l'établissement du courant, le champ magnétique créé par le solénoïde est nul et donc le flux à travers l'anneau est nul.

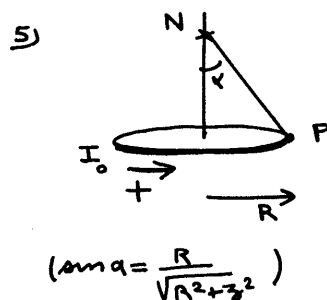
un peu après, il y a un champ $\vec{B}$ créé par le solénoïde et donc le flux à travers l'anneau est différent de zéro.

(son signe est en lien avec le sens du courant dans le solénoïde)

3) A grande distance du solénoïde ($z \rightarrow \infty$) le champ créé par le solénoïde tend vers zéro.

(si l'anneau est en $z \rightarrow \infty$ le flux est donc nul)

4) Lors de l'établissement du courant, l'anneau s'éloigne donc pour retrouver un flux plus proche de 0 conformément à la loi de modération.



$$\begin{aligned}\vec{B} &= B(z) \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{spire}} I_0 d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PN}}{PM^3}\end{aligned}$$

$$\text{avec } d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\text{et } \vec{PN} = \vec{ON} - \vec{OP}$$

$$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z) \begin{vmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \\ z & 0 \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l} \wedge \vec{PN} \begin{vmatrix} R z d\theta \\ 0 \\ R^2 d\theta \end{vmatrix}$$

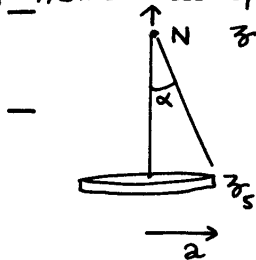
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_{axe} = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}_{axe} = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

6) nombre de spires dans une tranche dz_s :

$$dN = n dz_s \quad \underbrace{\quad}_{>0}$$



il faut multiplier le résultat pour une spire par le nombre de spires dans la tranche élémentaire.

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \right) n dz_s$$

avec

$$\tan \alpha = \frac{a}{(z - z_s)}$$

7) On intègre avec α comme variable donc

$$z - z_s = \frac{a}{\tan \alpha}$$

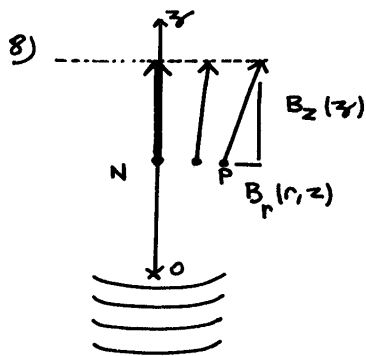
$$-dz_s = a \times \frac{-d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \right) n \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 n}{2} \int_0^{\alpha_{MAX}} \sin \alpha d\alpha \vec{u}_z$$

on avait $dz_s > 0$, on intègre donc sur z_s croissant donc de $\alpha=0$ à $\alpha = \alpha_{MAX}$ tel que $\cos \alpha_{MAX} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 n}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)}_{f(z)} \vec{u}_z$$



Equation de Maxwell - conservation du flux

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

Ici :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{dB_z}{dz}$$

car B_z n'est fonction que de z .

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -r \left(\frac{dB_z}{dz} \right)$$

on intègre à z constant

$$r B_r = -\frac{r^2}{2} \left(\frac{dB_z}{dz} \right) + \underbrace{K(z)}_{\text{fonction de } z}$$

en faisant $r=0$, on voit que $K(z)$ doit être nul

$$\boxed{B_r = -\frac{r}{2} \left(\frac{dB_z}{dz} \right)}$$

on trouve que B_r est du premier ordre en r .

$$\boxed{B_r(r, z) = \frac{r}{2} B_0 f'(z)}$$

9) Sur une portion $d\vec{l} = b d\theta \vec{u}_\theta$ de l'anneau de rayon b , la force de Laplace est :

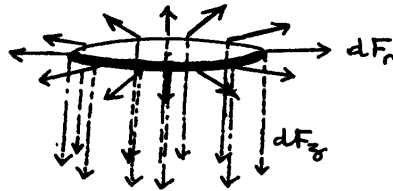
$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$	$\begin{vmatrix} 0 & b d\theta & 0 \\ 0 & 0 & B_z(z) \end{vmatrix}$
--	---

$$\boxed{d\vec{F} = i b d\theta B_z(z) \vec{u}_r - i b d\theta B_r(b, z) \vec{u}_z}$$

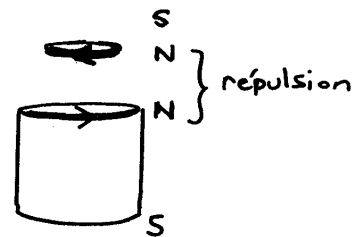
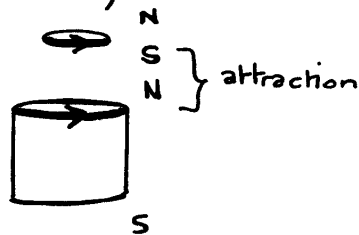
schéma (avec $i > 0$)

(et on admettant $B_r > 0$ et $B_z > 0$)



Vu la symétrie, la somme des dF_r s'annule et la force résultante a bien la direction selon z .

(selon $+\vec{u}_z$ si $i < 0$ et selon $-\vec{u}_z$ si $i > 0$, ce que l'on pouvait prévoir en analysant en faces Nord ou Sud le problème)



calcul
$$\vec{F} = i b B_z(z) \int_{\theta=0}^{2\pi} (d\theta \vec{u}_r) - i b B_r(b,z) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \vec{u}_z$$

↓

$$\int_0^{2\pi} (d\theta \cos\theta) \vec{u}_x + \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta \vec{u}_y$$

nul nul

$$\boxed{\vec{F} = -i b B_r(b,z) 2\pi \vec{u}_z}$$

10) —
$$\Phi = \int_{\text{anneau}} \vec{B} \cdot dS \vec{u}_z \quad \text{avec } \vec{B} = B_z(z) \vec{u}_z + B_r(r,z) \vec{u}_r$$

$$\boxed{\Phi = B_z(z) \pi b^2}$$

$$- \quad e_{\text{ext}} = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$= - \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{e_{\text{ext}} = - \pi b^2 \frac{dB_z(z)}{dz} v}$$

— Principe de conservation électromécanique :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + e_{\text{ext}} i = 0$$

On cherche F selon $\vec{u}_z$ avec $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = F v$

$$F v + \left(- \pi b^2 \frac{dB_z(z)}{dz} v \right) i = 0$$

On obtient

$$\boxed{\vec{F} = \pi b^2 \frac{dB_z(z)}{dz} i \vec{u}_z}$$

— Ce principe n'est applicable qu'en champ statique. $\mathcal{E}$

fallait B_z indépendant du temps en un point. On devait donc supposer I_0 indépendant du temps.

11) Les deux résultats sont :

$$\vec{F} = \pi b^2 i \frac{dB_z(z)}{dz} \vec{u}_z \quad \text{et}$$

$$\vec{F} = -2\pi b i B_r(b, z) \vec{u}_z$$

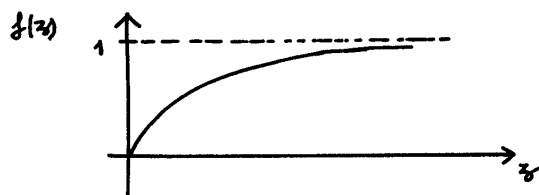
On a vu en 8)

$$\boxed{B_r(b, z) = - \frac{b}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}}$$

Les deux résultats sont bien identiques.

12) On peut prévoir que plus on s'éloigne du solénoïde semi-infini
plus B_z diminue donc $1-f(z)$ diminue.

$f(z)$ est croissante et $f'(z)$ positive



remarque :

B_z diminue aussi quand on s'éloigne sur l'axe d'une spire de courant

$$(B_z = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \sin^3 \alpha)$$

Par contre pour une spire chargée, E_z part de 0 dans le plan de la spire, passe par un maximum et tend vers 0 à l'infini.

$$13) \quad e_{\text{ext}} = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec } \phi = \pi b^2 B_0 (1-f(z)) \sin(\omega t)$$

L'anneau est fixé en z

$e_{\text{ext}} = - \omega \pi b^2 B_0 (1-f(z)) \cos(\omega t)$
$i = \frac{- \omega \pi b^2 B_0 (1-f(z)) \cos(\omega t)}{R}$

$$14) \quad F = -K i f'(z) \sin(\omega t) \quad (\text{avec } K = \pi b^2 B_0 \quad \text{cf 10) et 11)})$$

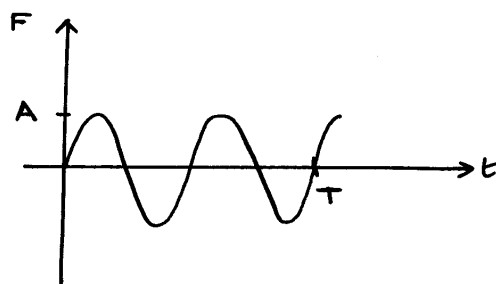
$$F = \underbrace{\frac{K \omega \pi b^2 B_0 (1-f(z)) f'(z)}{R}}_{2A} \underbrace{\sin \omega t \cos \omega t}_{\frac{\sin(2\omega t)}{2}}$$

$$F = A \sin 2t$$

avec

$A = \frac{K \omega \pi b^2 B_0 (1-f(z)) f'(z)}{2R}$	(>0)
$\Omega = 2\omega$	

La fréquence est double de celle du courant I



- 15) La force moyenne F à l'altitude z est donc nulle.
Ce modèle n'explique pas la lévitation (car i et B_{ext} sont en quadrature).
 Il faudra tenir compte de L (le déphasage i , B_{ext} sera différent de $\pm \pi/2$)

16) on a alors: $e_{ext} = Ri + L \frac{di}{dt}$

En régime sinusoïdal forcé

$$\underline{e}_{ext} = R \underline{i} + jL\omega \underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}_{ext}}{(R + jL\omega)}$$

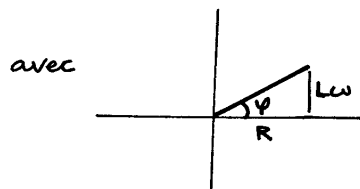
$$\varphi = \arg(R + jL\omega)$$

$$i = \frac{-\omega \pi b^2 B_0 (1 - f(z))}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctan \frac{L\omega}{R})$$

17) $F = \frac{2AR}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$

$$\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$$

$$\langle F \rangle = \frac{2AR}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left[\cos \varphi \underbrace{\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle}_{=0} + \sin \varphi \underbrace{\langle \sin^2 \omega t \rangle}_{=\frac{1}{2}} \right]$$



$$\sin \varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

$$\langle F \rangle = A \frac{R L \omega}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

18) $\langle F \rangle \neq 0$ et > 0

donc ce modèle convient.

Il faut encore ($\langle F \rangle$ dépend de z) que

$$\langle F \rangle_{\text{MAX}} > mg$$

pour $z=0$

soit en reportant $f(z)$ et K

$$\frac{\omega^2 \pi b^2 B_0^2}{2a} \frac{L\omega}{R^2 + L^2 \omega^2} > mg$$