

PROBLEME II - TABLE A INDUCTION

- Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.
- Logé dans une table en céramique, un bobinage (inducteur) alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même.
- Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif un choix s'impose quant aux propriétés du métal à chauffer.

Avertissements :

a) Ce problème conduit à comparer le comportement d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier magnétique, **cependant aucune connaissance des milieux magnétiques n'est nécessaire**. Les comparaisons seront abordées tout simplement en utilisant les valeurs des perméabilités magnétiques relatives μ_r données ci-après, sachant que la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ doit être systématiquement remplacée par la perméabilité magnétique absolue du métal : $\mu = \mu_0 * \mu_r$

b) On tiendra compte aussi du fait que la conductivité électrique γ des deux métaux considérés n'est pas la même. Les données sont :

- pour l'acier amagnétique : $\mu_r = 1$ et $\gamma = 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
- pour l'acier magnétique : $\mu_r = 350$ et $\gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$

c) La permittivité du vide sera prise égale à $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \text{ F.m}^{-1}$

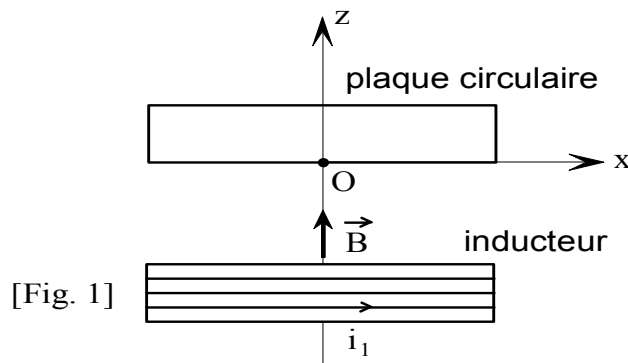
d) L'expression donnée ci-après du laplacien vectoriel d'un vecteur $\vec{j}$, pourra être utilisée sans démonstration :

$$\Delta \vec{j} = \text{grad} \left[\text{div} \vec{j} \right] - \text{rot} \left[\text{rot} \vec{j} \right]$$

e) On désignera par i le nombre complexe de module unité et d'argument $\pi/2$ et à toute grandeur harmonique de pulsation ω : $a(M,t) = a(M) \cos[\omega t + \phi(M)]$ on associera le nombre complexe $\underline{a}(M,t) = \underline{A}(M) \exp[i \omega t]$ où $\underline{A}(M)$ représente l'amplitude complexe $\underline{A}(M) = a(M) \exp[i \phi(M)]$.

1) Courants de Foucault - Effet de peau.

Un inducteur alimenté par un courant i_1 génère un champ magnétique $\vec{B}$ sinusoïdal de fréquence compatible avec l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.). Ce champ est globalement orienté suivant un axe Oz (Figure 1) autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique coaxial dont la face en regard vers l'inducteur est centrée en O.



[Fig. 1]

1.1 - Exprimer la loi qui permet de prévoir globalement le sens de rotation des courants induits dans la plaque circulaire. Préciser celui-ci. Quelle est la fréquence des courants induits ?

1.2 - Pour modéliser ces courants, on recherche une solution conforme aux équations de Maxwell et compatible avec l'hypothèse de charges mobiles entraînées en rotation autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire $\Omega(z)$, uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire.

Toute l'étude se fera en coordonnées cartésiennes dans le référentiel orthonormé Oxyz, l'axe Oy non représenté sur la figure 1 étant orienté normalement au plan du dessin, vers l'arrière.

1.2.1. Exprimer la vitesse linéaire $\vec{v}$ des charges électriques en un point M(x,y,z) du disque, sous forme d'un produit vectoriel fonction du rayon vecteur $\vec{OM}$ et du vecteur axial $\vec{\Omega}(z)$ représentant la vitesse de rotation, orienté selon Oz.

1.2.2. En déduire les composantes j_x et j_y de la densité de courant $\vec{j}$ en fonction du nombre n de charges élémentaires e mobiles par unité de volume, de la vitesse angulaire $\Omega(z)$ et des coordonnées du point M.

1.2.3. Calculer les dérivées partielles : $\frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2}$

1.3 - Equations de Maxwell

1.3.1. Exprimer la loi d'Ohm locale pour un métal de conductivité γ .

1.3.2. Ecrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue μ .

Tournez la page S.V.P.

1.3.3. A partir de ces équations de Maxwell, retrouver l'équation locale de conservation de la charge.

1.3.4. Si les conditions initiales étaient telles qu'une densité volumique de charges ρ_0 soit présente à l'instant $t = 0$, montrer qu'elle disparaîtrait en un temps très court. Evaluer ce temps et conclure qu'en régime établi, le conducteur reste globalement neutre en tout point de son volume. Donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss.

1.3.5. Montrer que, lorsque la fréquence imposée est égale à 25 kHz, les courants de déplacement sont tout à fait négligeables devant les courants de conduction. Dans ce cas, donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère.

1.3.6. Réécrire les équations de Maxwell ainsi obtenues, en utilisant la notation complexe pour les dérivations en fonction du temps. En déduire une relation exprimant la proportionnalité entre la densité de courant $\vec{j}$ et son laplacien vectoriel $\Delta \vec{j}$.

1.4 - On recherche pour les composantes j_x et j_y de la densité volumique de courant, des expressions complexes qui puissent s'écrire : $\underline{j}_x(z) \exp[i \omega t]$ et $\underline{j}_y(z) \exp[i \omega t]$. Monter alors, en utilisant les résultats obtenus en 1.2.3, que ces expressions sont régies par des équations différentielles de la forme :

$$\frac{d^2 \underline{j}_x}{dz^2} = f(\underline{j}_x) \quad [1] \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \underline{j}_y}{dz^2} = f(\underline{j}_y) \quad [2]$$

1.5 - Résoudre ces équations et écrire l'expression générale des amplitudes complexes $\underline{j}_x$ et $\underline{j}_y$ en faisant apparaître, dans chaque cas, les deux constantes d'intégration.

1.6 - Introduire une grandeur δ homogène à une longueur et caractéristique de l'atténuation suivant l'axe Oz. Quel nom donne-t-on habituellement à cette grandeur ? Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\delta \approx \frac{503,3}{\sqrt{\gamma \mu_r f}}$$

1.7 - L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence $f = 25$ kHz.

La plaque a une épaisseur égale à 1 cm.

a) Calculer la profondeur de pénétration des courants dans les deux cas, acier amagnétique puis acier magnétique, compte tenu des valeurs numériques données en début de problème.

b) Justifier que, malgré la petitesse de son épaisseur, l'on puisse considérer la plaque comme illimitée en z .

c) Simplifier alors les expressions de $\underline{j}_x$ et de $\underline{j}_y$.

1.8 - Donner en notation réelle l'expression de la norme du vecteur densité de courant $\vec{j}(z)$. On désignera par J_0 son amplitude en $z = 0$.