

16) $Q \gg \frac{1}{2}$

Les frottements sont minimes.

On a alors :

$$\rightarrow \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$$

$\rightarrow$ le $\sin \Omega t$ a une amplitude bien plus petite que celle du cosinus et on le néglige.

$$x \approx a e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t) + l_0$$

$$\dot{x} = a e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(-\frac{\omega_0}{2Q} \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right)$$

on néglige aussi

$$\dot{x} \approx -a e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

On retrouve les expressions en l'absence de frottement en remplaçant a par $a e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ d'où

$$E_{\text{meca}} = \frac{1}{2} k a^2$$

devient

$$E_{\text{meca}} = \frac{1}{2} k a^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$$

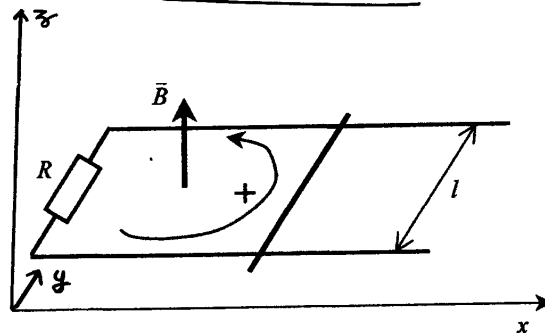
$$= \frac{1}{2} k a^2 e^{-t/\tau}$$

avec τ tel que

$$Q = \omega_0 \tau$$

17) à 20)

les axes choisis :



$$e = \int_{tige} (\vec{v} \wedge \vec{B}) dt$$

$$= \int_{y=0}^l (\dot{x} \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z) dy \vec{u}_y$$

$$e = - B l \dot{x}$$

$$\vec{F}_L = \int_{tige} i dt \vec{u}_y \wedge \vec{B}$$

$$= i \int_{y=0}^l dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_L = i B l \vec{u}_x$$

équation électrique :

$$e = R i$$

$$-B l \dot{x} = R i$$

équation mécanique :

$$\vec{F}_L = m \vec{a}$$

$$i B l = m \ddot{x}$$

21) Equation différentielle pour v

$$-B l \dot{x} = R i = R \frac{m \ddot{x}}{B l}$$

soit

$$\ddot{x} = - \frac{B^2 l^2}{m R} \dot{x}$$

on pose $\tau = \frac{m R}{B^2 l^2}$

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0$$

remarque :

on a donc

$$\vec{F}_L = m \dot{v} \vec{u}_x$$

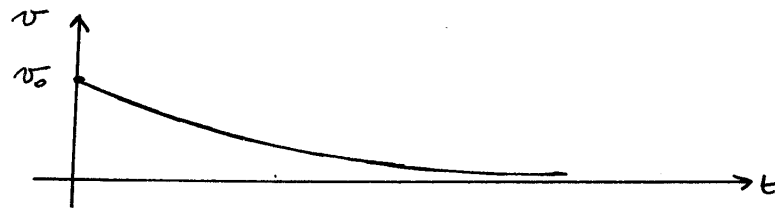
$$\vec{F}_L = - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

de la forme $\vec{F}_L = -\alpha \vec{v}$ (frottement fluide)

$$22) \quad v = A e^{-t/\tau}$$

$$\text{C.I.} \quad v_0 = A$$

$$v = v_0 e^{-t/\tau}$$



23) bilan de puissance électromagnétique

$$e = Ri$$

$$\rightarrow ei = Ri^2$$

bilan de puissance mécanique

$$F_L = m \dot{v}$$

$$F_L v = m \dot{v} v$$

$$\rightarrow F_L v = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

$$\text{or} \quad \underbrace{ei}_{-Blv i} + \underbrace{F_L v}_{+Blv} = 0$$

donc bilan électromécanique

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = - Ri^2$$

L'énergie cinétique se transforme en chaleur par effet Joule.

24) Il faut simplement remplacer e par $e + E$

Equations :

$$\begin{aligned} E - Blv &= Ri \\ iBl &= m \dot{v} \end{aligned}$$

25) Equation différentielle pour v :

$$E - Blv = R \frac{m \dot{v}}{Bl}$$

$$\frac{E}{Bl} - v = \tau \dot{v}$$

$$v + \tau \dot{v} = \frac{E}{Bl}$$

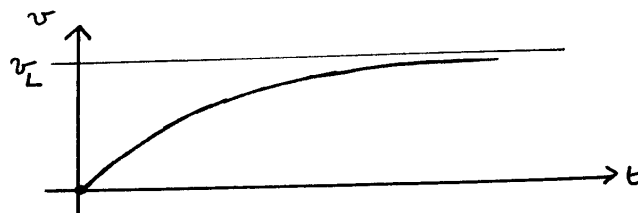
on pose: $v_L = \frac{E}{Bl}$

solution: $v = A e^{-t/\tau} + v_L$

C.I. $0 = A + v_L$

$$v = v_L (1 - e^{-t/\tau})$$

26)

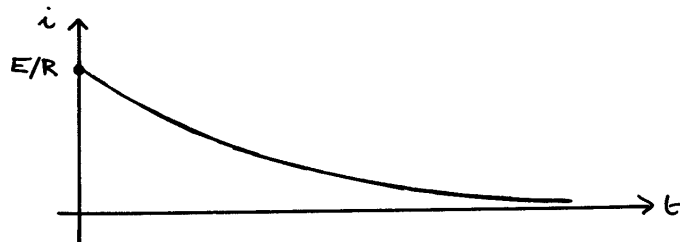


27)

$$i = \frac{m}{Bl} \dot{v}$$

$$= \frac{m}{Bl} v_L \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$



28) puissance électromagnétique
puissance mécanique

$$E i + e i = R i^2$$

$$F_L v = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

puissance électromécanique

$$E i = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

La puissance apportée par le générateur se transforme en chaleur (effet joule) ou en énergie cinétique pour la tige.

29) On tient compte du ressort :

Equations :

$$\begin{aligned} E - Bl\dot{x} &= Ri \\ -k(x-l_0) + Bl\dot{x} &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

Donc :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2(x-l_0) = \frac{ElB}{mR}$$

30) A l'équilibre ($\ddot{x}=0$) et au repos ($\dot{x}=0$)

$$\omega_0^2(x_{eq}-l_0) = \frac{ElB}{mR}$$

En faisant la différence entre les deux équations :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2(x-x_{eq}) = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau} + \omega_0^2 X = 0$$

31) équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{1}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$$

$$r = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$$

$$= -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

$$= -\frac{1}{2\tau} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2}}$$

$$\approx 1 \text{ car } \omega_0\tau = Q \gg 1$$

$$X = e^{-t/2\tau} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} = e^{-t/2\tau} \omega_0 & \left([-A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\omega_0\tau} [A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t] \right) \end{aligned}$$