

Correction : Propagation d'ondes électromagnétiques planes dans le vide

1.

1.1.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

les équations de propagations sont :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0}\end{aligned}$$

1.2. La résolution de :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

donne :

$$X = f_+(z - ct) + f_-(z + ct)$$

1.3. $f_+(z - ct)$ représente une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des z croissants.

$f_-(z + ct)$ représente une onde plane progressive se propageant à la célérité c dans le sens des z décroissants.

1.4.

$$f(\vec{OM} \cdot \vec{u} - ct)$$

2.

2.1. On a :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(z - ct) = \vec{E}(p) \\ \vec{B} &= \vec{B}(z - ct) = \vec{B}(p)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_z \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d}{dp} = \vec{e}_z \frac{d}{dp} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial t} \frac{d}{dp} = -c \frac{d}{dp}\end{aligned}$$

D'où les équations de MAXWELL en absence de charges et de courants, donnent :

$$\text{M. G : } \frac{dE_z}{dp} = 0 \quad ; \quad \text{M. F : } \begin{cases} \frac{dE_y}{dp} = -c \frac{dB_x}{dp} \\ \frac{dE_x}{dp} = c \frac{dB_y}{dp} \\ 0 = c \frac{dB_z}{dp} \end{cases} \quad ; \quad \text{M. } \Phi : \frac{dB_z}{dp} = 0 \quad \text{et} \quad \text{M. A : } \begin{cases} \frac{dB_y}{dp} = \frac{1}{c} \frac{dE_x}{dp} \\ \frac{dB_x}{dp} = -\frac{1}{c} \frac{dE_y}{dp} \\ 0 = -\frac{1}{c} \frac{dE_z}{dp} \end{cases}$$

2.2. M.G et M.Φ donnent, après avoir annulé les constantes d'intégration puisqu'il s'agit d'une onde :

$$E_z = 0 \quad \text{et} \quad B_z = 0$$

Donc les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses.

M.F et M.A donnent :

$$E_y = -cB_x \quad \text{et} \quad E_x = cB_y$$

D'où :

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad |\vec{E}| = c|\vec{B}|$$

Ces propriétés se résument donc par la relation vectorielle :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$$

2.3. Les équations de propagations de V et $\vec{A}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Leurs solutions sont respectivement :

$$V = V(p) \quad \text{et} \quad \vec{A} = \vec{A}(p)$$

2.4. On a :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Or :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_z \frac{d}{dp} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{d}{dp}$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = c \frac{dA_x}{dp} \\ E_y = c \frac{dA_y}{dp} \\ E_z = \frac{d}{dp}(-V + cA_z) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = -\frac{dA_y}{dp} \\ B_y = \frac{dA_x}{dp} \\ B_z = 0 \end{array} \right.$$

2.5. La jauge de LORENTZ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

conduit à :

$$\frac{dA_z}{dp} - \frac{1}{c} \frac{dV}{dp} = 0$$

Donc :

$$cA_z - V = 0$$

et par suite :

$$E_z = 0$$

Il est possible de choisir $V = 0$ car dans ce cas $A_z = 0$ et les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont pas affectées.

2.6. On a

$$Z_c = \mu_0 \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

AN :

$$Z_c = 377 \, \Omega$$

3.

3.1. La densité volumique d'énergie électromagnétique se trouvant dans un volume τ **fixe** dans le référentiel d'étude, à l'instant t , est :

$$\begin{aligned} W_{em}(t) &= W_{em}(t + dt) + W_{rayonn} \\ -\frac{dW_{em}}{dt}dt &= \iiint_{\tau} \vec{R} d\vec{S} dt \\ -\iiint_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau &= \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{R} d\tau \end{aligned}$$

D'où l'équation locale de conservation de l'énergie est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

3.2. À partir des équations de MAXWELL, on montre que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right)$$

Par identification de l'équation locale de conservation de l'énergie établie ci-dessus :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ u &= \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \end{aligned}$$

3.3. On a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$$

D'où, puisque $\vec{E} \perp \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z = \varepsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{e}_z \\ u &= \varepsilon_0 \vec{E}^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{R} = cu \vec{e}_z$$

et la vitesse de propagation de l'énergie est :

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{R}}{u} = c \vec{e}_z$$