

Bien sûr  $\vec{j}_S$  est colinéaire à  $\vec{E}_i$  puisque c'est le champ électrique incident en  $z = 0$  qui met les électrons de conduction en mouvement ; c'est ce mouvement qui, par rayonnement, est à l'origine de l'onde réfléchie.

### 3.3 Réflexion oblique d'une OPPM (pol. rect.)

#### A. Le champ électrique est parallèle au plan du conducteur

Une onde électromagnétique, plane, progressive, de pulsation  $\omega$  se propage dans le vide.

Le champ électrique relativement à un repère orthonormé  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  s'écrit

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

- Quel est le vecteur de propagation  $\vec{k}$  de l'onde ? L'exprimer en fonction de  $\omega$ ,  $c$  et  $\vec{u}$  vecteur unitaire dans le sens de la propagation de l'onde.
  - Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_i$  associé à  $\vec{E}_i$  (en notant  $\vec{u}'$  le vecteur tel que  $\vec{u}' = \vec{u} \wedge \vec{u}_z$ ). Représenter sur un schéma les trois vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$ .
  - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\langle \vec{R} \rangle$ . Quelle est l'intensité  $I$  de l'onde, définie comme la puissance surfacique moyenne à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation ?
- L'onde se propage dans la région des  $x$  négatifs. En  $x = 0$  est placé un miroir métallique parfait ( $M$ ) (c'est-à-dire de conductivité quasi-infinie).  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  sont les champs réfléchis.  
L'onde se réfléchit suivant les lois de Descartes. Quelles sont les relations vérifiées par les champs dans le plan  $x = 0$  ?  
Déterminer et représenter sur un même schéma les vecteurs  $\vec{k}_r$ ,  $\vec{E}_r$  et  $\vec{B}_r$  ainsi que  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$ .
  - Déterminer la densité superficielle de charge  $\sigma(y, t)$  et de courant  $\vec{j}_S(y, t)$  dans le plan  $x = 0$
  - On considère un élément  $dS$  de la surface du miroir.
    - Calculer les forces électrique  $d\vec{f}_e$  et magnétique  $d\vec{f}_m$  agissant sur  $dS$ . Quel est leur sens ?
    - Donner la pression électromagnétique  $P_{em}$  puis sa moyenne temporelle  $\langle P_{em} \rangle$ .

### B. Le champ magnétique est parallèle au plan du conducteur

L'onde incidente est déterminée cette fois par son champ magnétique

$$\vec{B}_i' = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

1. Déterminer le champ  $\vec{E}_i'$  associé.
2. En déduire les champs  $\vec{E}_r'$  et  $\vec{B}_r'$  de l'onde réfléchie par le même miroir qu'en A et représenter sur un même schéma l'ensemble des vecteurs.
3. Déterminer la densité superficielle de charge  $\sigma'(y, t)$  et de courant  $\vec{j}_S'(y, t)$  dans le plan  $x = 0$ .
- 4.a) En déduire les expressions des forces électrique et magnétique  $d\vec{f}_e'$  et  $d\vec{f}_m'$  agissant sur un élément  $dS$  du miroir. Quel est leur sens ?
- b) La pression électromagnétique  $P_{em}'$  diffère-t-elle de  $P_{em}$  obtenue en A4.b) ? Indiquer brièvement ce qui se passe dans les deux cas si  $\alpha = \pi/2$ .

### C. Interprétation corpusculaire

1. Rappeler les expressions de l'énergie  $\varepsilon$  et de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un photon associé à une onde de pulsation  $\omega$  se propageant dans la direction  $\vec{u}$ .  
L'appliquer aux ondes  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$  et  $(\vec{E}_i', \vec{B}_i')$  des questions A et B. Conclusion.
2. Quelle est la quantité de mouvement  $d\vec{p}$  transférée au miroir par un photon qui subit, avec l'incidence  $\alpha$ , un choc élastique sur le miroir fixe.
- 3.a) Quel est le nombre de photons  $d^2\mathcal{N}$  qui pendant l'intervalle de temps  $dt$  se réfléchissent avec l'incidence  $\alpha$  sur une surface  $dS$  du miroir sachant que la puissance surfacique incidente ou intensité est  $I$ .
- b) En déduire la pression électromagnétique moyenne définie de façon corpusculaire.

A 1.a) Cherchant une phase de la forme  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ , il vient  $\vec{k} = \begin{vmatrix} k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

Cette phase peut aussi s'écrire  $\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$ , d'où

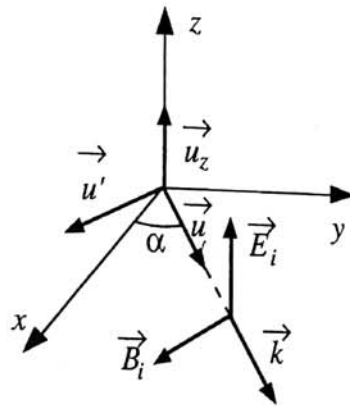
$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$$

b) Pour une OPPM,  $\vec{B}_i = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_i}{c}$

$$\text{avec } \vec{u} \wedge \vec{u}_z = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{u}'$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u}' = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$(\vec{k}, \vec{E}_i, \vec{B}_i)$  forme un trirectangle direct.



c)  $\vec{R} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \epsilon_0 c \vec{E}_i \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}_i) = \epsilon_0 c \vec{E}_i^2 \vec{u}$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u} = I \vec{u}$$

$$\text{avec } I = \frac{\langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \text{ car } d\vec{S} = dS \vec{u}$$

2. La loi de Descartes dit que  $\vec{k}_r$  est dans le plan d'incidence  $Oxy$  et que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, d'où  $\vec{k}_r = \begin{vmatrix} -k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$  (même  $k$  car la pulsation est conservée et le milieu inchangé).

\* Les champs sont nuls dans le conducteur parfait. La continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  en  $x = 0$  (suivant  $Oz$ ) s'écrit  $E_i(x=0) + E_r(x=0) = 0$  soit  $E_{0r} = -E_0$  (opposition de phase à la réflexion).

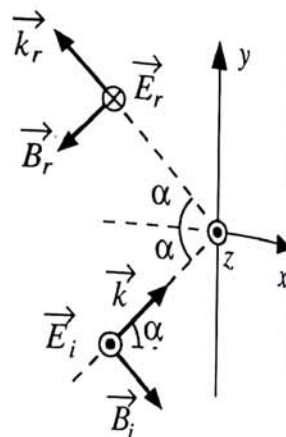
d'où

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}_z$$

$\vec{E}_r$  et  $\vec{k}_r$  suffisent à déterminer

$$\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

La continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  soit  $B_x$  est alors automatiquement assurée en  $x = 0$  :  $B_{ix}(x=0) + B_{rx}(x=0) = 0$ .  
 Le fait que  $B_{iy} + B_{ry} \neq 0$  en  $x = 0$  est lié à l'apparition d'un courant surfacique.  
 (les vecteurs sont représentés dans leur rapport de phase en  $x = 0$ ).



3.  $\sigma$  est lié à une discontinuité de composante normale de  $\vec{E}$  en  $x = 0$  ; or ici

$$E_{ix} = E_{rx} = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\sigma = 0$$

$\vec{j}_S$  est lié à une discontinuité de composante tangentielle de  $\vec{B}$  en  $x = 0$ , ici  $B_y$ .  
 $B_{iy}(x=0) = -\frac{E_0}{c} \cos \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y)$ ,  $B_{ry}(x=0) = -\frac{E_0}{c} \cos \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y)$   
 avec  $(B_{iy} + B_{ry})\vec{u}_y - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_x)$

d'où

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

4.a) en  $dS$ ,  $\sigma = 0 \Rightarrow$

$$d\vec{f}_e = \vec{0}$$

et  $d\vec{f}_m = \vec{j}_S dS \wedge \left( \frac{\vec{B}_i + \vec{B}_r}{2} \right)_{x=0}$  (voir exercice 3.1 §5).

$\Rightarrow$

$$d\vec{f}_m = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_x$$

Cette force s'exerce vers l'intérieur du conducteur.

b) 
$$P_{em} = \frac{|d\vec{f}_e + d\vec{f}_m|}{dS} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y)$$

$\Rightarrow$

$$\langle P_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{2I}{c} \cos^2 \alpha$$

B 1. Pour une OPPM,  $\vec{B}'_i = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}'_i}{c}$  soit  $\vec{E}'_i = c\vec{B}'_i \wedge \vec{u}$  avec

$$\vec{u}_z \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = -\vec{u}'$$

$$\vec{E}'_i = \begin{vmatrix} -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ 0 \end{vmatrix}$$

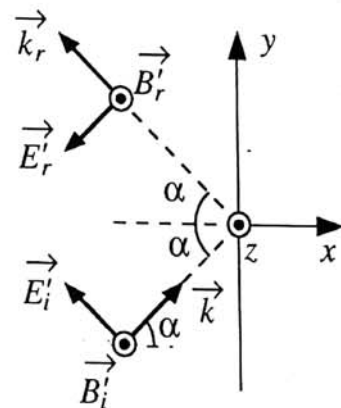
2. Comme en A2.,  $\vec{k}_r$  se déduit de  $\vec{k}$  par les lois de Descartes :  $\vec{k}_r = \begin{vmatrix} -k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

Avec  $E_{iy}(x=0) + E_{ry}(x=0) = 0$  par continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ , les composantes suivant  $y$  sont opposées, ce qui permet d'avoir le sens de  $\vec{E}'_r$  par ailleurs perpendiculaire à  $\vec{k}_r$  (car  $\text{div } \vec{E}'_r = 0$ ).  $\vec{B}'_r$  est déterminé pour que  $(\vec{k}_r, \vec{E}'_r, \vec{B}'_r)$  soit direct.

$$\vec{E}'_r = E_0 \cos(\omega t + k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\vec{B}'_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$



$\vec{B}'$  n'a qu'une composante ; c'est la tangentielle, donc un courant surfacique subsiste.  $\vec{E}'$  possède en plus de la composante tangentielle, une composante normale dont la somme  $E'_{ix}(x=0) + E'_{rx}(x=0) \neq 0$ , d'où apparition de charges surfaciques.

$$3. (E'_{ix}(x=0) + E'_{rx}(x=0)) \vec{u}_x - \vec{0} = -2E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} (-\vec{u}_x)$$

$\Rightarrow$

$$\sigma' = 2\epsilon_0 E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y)$$

**Remarque :** A  $t$  fixé,  $\sigma'$  est une fonction sinusoïdale de  $y$ , donc à valeur moyenne (spatiale) nulle conformément à la conservation de la charge (conducteur initialement neutre).

$$(B'_{iy}(x=0) + B'_{ry}(x=0))\vec{u}_z - \vec{0} = 2\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}'_S \wedge (-\vec{u}_x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{j}'_S = 2\epsilon_0 c E_0 \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_y$$

$$4.a) d\vec{f}'_e = \sigma' dS \left( \frac{\vec{E}'_i + \vec{E}'_r}{2} \right)_{x=0} \Rightarrow d\vec{f}'_e = -2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_z$$

orientée vers l'extérieur du miroir

$$d\vec{f}'_m = dS \vec{j}'_S \wedge \left( \frac{\vec{B}'_i + \vec{B}'_r}{2} \right)_{x=0} \Rightarrow d\vec{f}'_m = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_x$$

orientée vers l'intérieur du miroir

$$b) P'_{em} = \frac{|d\vec{f}'_e + d\vec{f}'_m|}{dS} = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) = P_{em}$$

Même pression qu'en A4., mais cette fois-ci répartie entre  $\vec{f}'_e$  et  $\vec{f}'_m$ 

$$\langle P'_{em} \rangle = \langle P_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{2I}{c} \cos^2 \alpha$$

Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , l'onde se propage le long du miroir et  $P'_{em} = P_{em} = 0$ , mais alors que dans le cas A,  $\vec{f}_e = \vec{f}_m = \vec{0}$ , dans le cas B,  $\vec{f}_e = -\vec{f}_m \neq \vec{0}$ .

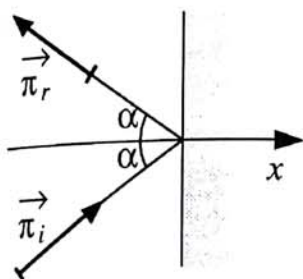
C 1. Énergie du photon :  $\epsilon = h\nu = \hbar\omega$  avec  $\hbar = h/2\pi$ .

$$\text{Quantité de mouvement : } \vec{\Pi} = \frac{\epsilon}{c} \vec{u} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{u} = \hbar \vec{k}$$

Comme les ondes en A et B ont même pulsation et même vecteur d'onde, on en déduit  $\epsilon_i = \epsilon'_i = \hbar\omega$  et  $\vec{\Pi}_i = \vec{\Pi}'_i = \hbar \vec{k}$ .

La théorie corpusculaire ne fait donc aucune différence à ce niveau entre les deux ondes en A et B qui diffèrent simplement par la direction de polarisation vis à vis du miroir ; plus précisément, dans le cas A, le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence et dans le cas B, il est contenu dans ce plan.

2.



Pour le photon, la variation de quantité de mouvement est  $\Delta \vec{\pi} = \vec{\pi}_r - \vec{\pi}_i = 2\pi \cos \alpha (-\vec{u}_x)$   
 La conservation de la quantité de mouvement pour le système (photon + miroir) s'écrit  $\vec{\pi}_i + \vec{0} = \vec{\pi}_r + d\vec{p}$ ,  
 le miroir reçoit ainsi une impulsion élémentaire  $d\vec{p} = -\Delta \vec{\pi} = 2\pi \cos \alpha \vec{u}_x$ , normale à la surface vers l'intérieur

$$d\vec{p} = 2\hbar k \cos \alpha \vec{u}_x$$

- 3.a) Les  $d^2\mathcal{N}$  photons qui se réfléchissent en moyenne sur  $dS$  pendant  $dt$  (sous incidence  $\alpha$ ) possèdent l'énergie  $d^2\mathcal{N} \cdot \epsilon$  qui s'identifie à l'énergie moyenne de l'onde traversant  $dS$  pendant  $dt$  soit  $\langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} dt = I \cos \alpha dS dt$

d'où

$$d^2\mathcal{N} = \frac{I \cos \alpha}{\epsilon} dS dt$$

- b) Chaque photon transfère au miroir la quantité de mouvement  $d\vec{p} = 2\hbar k \cos \alpha \vec{u}_x$ .  
 Au total et par unité de temps cela correspond à une force

$$d\vec{f} = \frac{d^2\mathcal{N} \cdot d\vec{p}}{dt} = 2 \frac{I \hbar k}{\epsilon} \cos^2 \alpha dS \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \frac{\hbar k}{\epsilon} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

d'où la pression

$$\langle P \rangle = \frac{|d\vec{f}|}{dS} = 2 \frac{I \cos^2 \alpha}{c}$$

qui coïncide avec  $\langle P_{em} \rangle$ 

### 3.4 Onde diffractée par un réseau métallique

Une surface d'équation  $y = f(x)$  périodique de période  $a$ , supposée infinie dans les directions  $x$  et  $z$ , sépare l'espace en deux parties :

- la région  $y > f(x)$  est vide,
- la région  $y < f(x)$  est constituée d'un métal parfaitement conducteur.

Cette surface "ondulée" d'équation  $y = f(x)$  constitue un réseau métallique. Son pas  $a$  n'étant pas infiniment grand devant la longueur d'onde  $\lambda$ ,

