

Correction : Guide d'ondes rectangulaire

1.

1.1. Dans le vide, l'équation de propagation du champ électrique s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

D'où :

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + (k_0^2 - k_g^2) f = 0$$

1.2. La relation caractéristique de l'équation ci-dessus est :

$$r^2 = k_g^2 - k_0^2$$

Donc si $k_g > k_0$:

$$f(y) = A \exp\left(\sqrt{k_g^2 - k_0^2} y\right) + B \exp\left(-\sqrt{k_g^2 - k_0^2} y\right)$$

avec A et B deux constantes.

Or le métal du guide étant parfait, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ s'écrivent, respectivement, en $y = 0$ et $y = b$:

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0$$

D'où :

$$A + B = 0 \quad \text{et} \quad A \exp\left(\sqrt{k_g^2 - k_0^2} b\right) + B \exp\left(-\sqrt{k_g^2 - k_0^2} b\right) = 0$$

Donc :

$$A = B = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = 0$$

D'où on aura un champ électrique nul, ce qui est en contradiction avec le fait d'avoir une onde électromagnétique dans le guide.

Si $k_g < k_0$:

$$f(y) = A' \cos\left(\sqrt{k_0^2 - k_g^2} y\right) + C' \sin\left(\sqrt{k_0^2 - k_g^2} y\right)$$

or $f(0) = 0$ et $f(b) = 0$, donc :

$$A' = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{k_0^2 - k_g^2} b = n\pi$$

avec $n \in \mathcal{N}^*$.

D'où en posant $C' = E_n$, on aura :

$$f(y) = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$$

À $z = \text{cte}$, l'onde est stationnaire vibrant sur place avec une pulsation ω et une amplitude $E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$.

À $y = \text{cte}$, l'onde est monochromatique et progressive dans le sens des z croissants.

1.3. La relation de passage de $\vec{E}$ donne, respectivement, en $x = 0$ et $x = a$:

$$\sigma(x = 0) = \varepsilon_0 E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - k_g z) \quad \text{et} \quad \sigma(x = a) = -\sigma(x = 0)$$

1.4. On a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'où :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y(y, z) = \frac{k_g}{\omega} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z) \\ B_z(y, z) = \frac{n\pi}{b\omega} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - k_g z) \end{cases}$$

En $x = \text{cte}$, $\vec{B}$ est polarisée elliptiquement.

1.5. En $x = 0$:

$$B_y(y, z) \vec{e}_y + B_z(y, z) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_s(x=0) \wedge \vec{e}_x$$

$$\vec{j}_s(x=0) = \left[\frac{k_g}{\omega\mu_0} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_z - \left[\frac{n\pi}{b\omega\mu_0} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_y$$

En $x = a$:

$$B_y(y, z) \vec{e}_y + B_z(y, z) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s(x=a) \wedge \vec{e}_x$$

$$\vec{j}_s(x=a) = -\vec{j}_s(x=0)$$

En $y = 0$:

$$B_y(0, z) \vec{e}_y + B_z(0, z) \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_s(y=0) \wedge \vec{e}_y$$

$$\vec{j}_s(y=0) = \left[\frac{n\pi}{b\omega\mu_0} E_n \sin(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_x$$

En $y = b$:

$$B_y(b, z) \vec{e}_y + B_z(b, z) \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}_s(y=b) \wedge \vec{e}_y$$

$$\vec{j}_s(y=b) = - \left[\frac{n\pi}{b\omega\mu_0} (-1)^n E_n \sin(\omega t - k_g z) \right] \vec{e}_x$$

1.6. D'après **1.2.**, on a :

$$k_g = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Or :

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

D'où :

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b}\right)^2}}$$

Comme k_g est réel :

$$\omega > \frac{n\pi c}{b} \implies f > \frac{nc}{2b} = f_c$$

AN :

$$b = 6 \text{ cm}$$

1.7.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > c \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < c$$

AN :

$$v_\varphi \simeq 3,5.10^8 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_g \simeq 2,6.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

2.

2.1.

$$\begin{aligned}\vec{\pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E}{\mu_0} (-B_z \vec{e}_y + B_y \vec{e}_z) \\ \vec{\pi} &= \begin{cases} 0 \\ -\frac{n\pi}{\mu_0 b \omega} E_n^2 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \sin(\omega t - k_g z) \\ \frac{k_g}{\mu_0 \omega} E_n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cos^2(\omega t - k_g z) \end{cases}\end{aligned}$$

D'où :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{k_g}{2\mu_0 \omega} E_n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \vec{e}_z$$

La puissance moyenne :

$$\begin{aligned}P_m &= \iint \langle \vec{\pi} \rangle dx dy \vec{e}_z = \frac{a k_g}{2\mu_0 \omega} E_n^2 \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{a b k_g}{4\mu_0 \omega} E_n^2\end{aligned}$$

2.2. Densité volumique d'énergie :

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} (B_y^2 + B_z^2) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{k_g^2}{\omega^2} E_n^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos^2(\omega t - k_g z) + \frac{n^2 \pi^2}{b^2 \omega^2} E_n^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin^2(\omega t - k_g z) \right]\end{aligned}$$

D'où :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_n^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \frac{E_n^2}{4\mu_0 \omega^2} \left[k_g^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right]$$

or :

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$$

d'où :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_n^2 \left[\sin^2 \frac{n\pi y}{b} \left(1 + \frac{c^2}{\omega^2} k_g^2 \right) + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right]$$

2.3. Calculons, de deux manières différentes, l'énergie moyenne traversant une section droite du guide, entre l'instant t et $t + dt$:

•

$$dW_{em} = P_m dt \quad (6.4)$$

$$= \frac{a b k_g}{4\mu_0 \omega} E_n^2 dt \quad (6.5)$$

• Cette énergie est égale aussi à l'énergie localisée dans le volume dont la base est la section droite du guide et de longueur $dz = v_e dt$:

$$\begin{aligned}dW_{em} &= \int_0^a \int_0^b \langle u \rangle dx dy v_e dt \\ &= \int_0^a \int_0^b \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_n^2 \left[\sin^2 \frac{n\pi y}{b} \left(1 + \frac{c^2}{\omega^2} k_g^2 \right) + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] dx dy v_e dt \\ &= \frac{a b}{8} \varepsilon_0 E_n^2 \left[1 + \frac{c^2}{\omega^2} \left(k_g^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \right] v_e dt\end{aligned}$$

or :

$$\left(k_g^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}$$

d'où :

$$dW_{em} = \frac{ab}{4} \varepsilon_0 E_n^2 v_e dt \quad (6.6)$$

Les relations (2) et (3) donnent :

$$v_e = c^2 \frac{k_g}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

2.4. Dans ce cas, on aura à l'intérieur du métal réel, un courant volumique non nul engendrant une dissipation d'énergie et donc atténuation de l'onde électromagnétique le long du guide.

3.

3.1. L'angle d'incidence α étant égal à l'angle réfléchi :

$$\vec{k}_i = -k_0 \cos \alpha \vec{e}_y + k_0 \sin \alpha \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = k_0 \cos \alpha \vec{e}_y + k_0 \sin \alpha \vec{e}_z$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique en $y = 0$, donne :

$$(E_i^0 + E_r^0) \sin(\omega t - k_0 z \sin \alpha) = 0 \quad , \quad \text{quelque soit } t \text{ et } z$$

D'où :

$$E_r^0 = -E_i^0$$

3.2.

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad (6.7)$$

$$= E_i^0 [\sin(\omega t + k_0 y \cos \alpha - k_0 z \sin \alpha) - \sin(\omega t - k_0 y \cos \alpha - k_0 z \sin \alpha)] \vec{e}_x \quad (6.8)$$

$$= 2E_i^0 \sin(k_0 y \cos \alpha) \cos(\omega t - k_0 z \sin \alpha) \vec{e}_x \quad (6.9)$$

Or l'expression de $\vec{E}$ trouvée dans au début de l'énoncé est :

$$\vec{E} = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$$

Par identification des deux expressions de $\vec{E}$ ci-dessus, on trouve :

$$k_g = k_0 \sin \alpha \quad \text{et} \quad k_0 \cos \alpha = \frac{n\pi}{b}$$

donc :

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}$$

D'après ce qui précède :

$$k_g^2 = k_0^2 \sin^2 \alpha = k_0^2 (1 - \cos^2 \alpha) = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

On retrouve donc la relation demandée à la question **1.6.** entre k_g , k_0 , n et b .