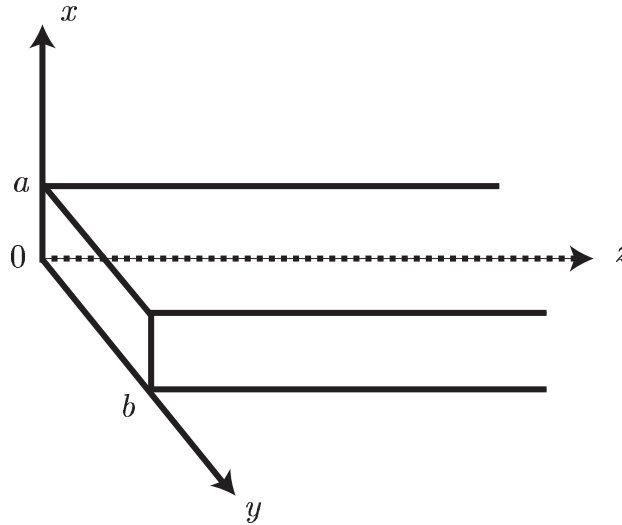


Problème : Guide d'ondes rectangulaire

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$, délimitent un "guide d'ondes" de longueur infinie suivant Oz , de section droite rectangulaire et dont lequel règne le vide ; $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ désignent les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy et Oz .



On se propose d'étudier la propagation, dans ce guide suivant la direction Oz , d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , dont le champ s'écrit :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$$

où $f(y)$ désigne une fonction réelle de la variable y , k_g est une constante positive.

On pose $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ (λ_g est la "longueur d'onde guidée") et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$.

1. Structure de l'onde

1.1. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(y)$.

1.2. En utilisant les conditions que doit vérifier le champ $\vec{E}$ sur les plans conducteurs $y = 0$ et $y = b$, expliciter la fonction $f(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif). A chaque valeur de n correspond un mode de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit.

Que laissent prévoir les conditions aux limites de $\vec{E}$ sur $x = 0$ et $x = a$.

1.3. Écrire les composantes du champ magnétique $\vec{B}$. Quelle est sa polarisation ? Vérifier que $\vec{B}$ satisfait également aux conditions aux limites en $y = 0$ et $y = b$. Que se passe-t-il en $x = 0$ et $x = a$?

1.4. Exprimer k_g en fonction de ω , c , n et b (relation (1)). En déduire λ_g en fonction de λ_0 , b et n . Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.

Application numérique : Sachant que $f_c = 2.5$ GHz pour $n = 1$, calculer b .

1.5. Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe de l'onde en fonction de c , n et du rapport $\frac{f}{f_c}$ (f étant la fréquence de l'onde).

Application numérique : Calculer v_φ et v_g pour $f = 2f_c$.

2. Transmission de l'énergie

2.1. Donner l'expression du vecteur de POYNTING $\vec{\pi}$.

Quelle est la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\pi} \rangle$ de ce vecteur ? Pourrait-on prévoir son sens vue la structure

de l'onde ?

En déduire la puissance moyenne P_m transmise par une section droite du guide d'ondes.

2.2. Calculer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.

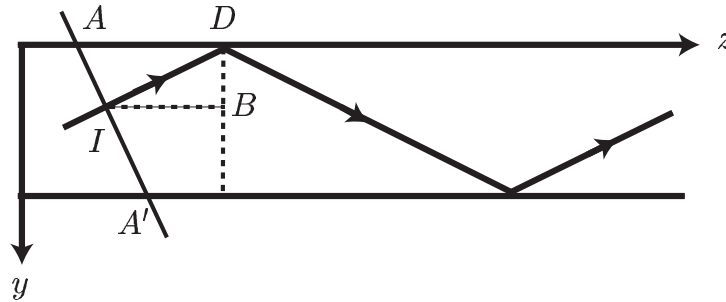
2.3. A l'aide des résultats précédents, déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie. La comparer à v_φ et v_g .

2.4. Si les parois du guide d'ondes avaient une conductivité finie, quelle en serait la conséquence la plus importante ?

3. Réflexions internes

On se propose d'interpréter certains résultats démontrés ci-dessus en considérant que, que dans le guide d'ondes, une onde électromagnétique, monochromatique, plane à polarisation rectiligne ($\vec{E}$ parallèle à Ox) se réfléchit tour à tour sur les parois métalliques parallèles au plan Oxz . Dans ces conditions l'onde définie à la question **1.** résulte de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie dont les champs électriques s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_i^0 \sin(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = E_r^0 \sin(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{e}_x$$



3.1. Écrire les composantes des vecteurs d'ondes incidents $\vec{k}_i$ et réfléchi $\vec{k}_r$ en fonction de k_0 et α , angle d'incidence.

Déterminer l'amplitude E_r^0 en fonction de E_i^0 .

3.2. Écrire le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde résultante de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, en un point I donné. En identifiant l'expression obtenue et celle donnée en début d'énoncé, exprimer k_g en fonction de k_0 et α puis λ_g en fonction de λ_0 et α , puis donner la relation entre k_0 , α , n et b . Interpréter géométriquement la relation (1).

3.3. Considérons sur la figure ci-dessus le tronçon d'onde oblique ID où I est un point quelconque et D est le point de l'axe où cette onde se réfléchit. A quelle vitesse ce trajet est-il parcouru par l'onde ?

A est l'intersection du plan d'onde passant par I et de l'axe Oz et B est dans la même section droite du guide que D . A quelles vitesses sont balayées les distances AD et IB ? Proposer une interprétation de v_φ et v_e .