

Correction : Mode TEM dans un câble coaxial

1. **M.F** $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 - i\beta \vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 = -i\omega \vec{B}_0$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

De même **M.A** donne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \beta \vec{B}_0 = -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2}$$

2.1. On a :

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0}{\omega} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z \wedge \beta \vec{B}_0 = -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2}$$

D'où :

$$\vec{e}_z \wedge \beta \frac{\vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0}{\omega} = -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2}$$

Or

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{et} \quad E_{0z} = \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_z = 0$$

ce qui donne, pour une propagation à z croissant :

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

Comme :

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0}{\omega}$$

alors :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$$

L'onde TEM a une structure d'onde localement plane se propageant dans le vide.

2.2.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = c \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c$$

2.3. Puisque :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = \vec{0}$$

il existe un potentiel $V(r, \theta)$ tel que :

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V$$

M.G :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 \exp i(\omega t - \beta z)] = 0$$

Or :

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{a}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{a}$$

d'où :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 - i\beta \vec{e}_z \cdot \vec{E}_0 = 0$$

et puisque $E_{0z} = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = -\Delta V = 0$$

Donc :

$$\Delta V = 0$$

2.4. Le câble est invariant par rotation autour de Oz puisque $V(r = a, \theta) = V_1$ et $V(r = b, \theta) = V_2$ quelque soit θ , d'où V ne dépend que de r .

On a donc :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

ce qui donne :

$$V = A \ln r + B$$

A et B deux constantes d'intégration.

Or :

$$V_1 = A \ln a + B \quad \text{et} \quad V_2 = A \ln b + B$$

alors :

$$V = \frac{V_2 - V_1}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{a} + V_1$$

2.5.

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= -\vec{\nabla} V \\ &= \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Or :

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}_0}{c} = \frac{V_1 - V_2}{c r \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \vec{e}_r \\ \underline{\vec{B}} &= \frac{V_1 - V_2}{c r \ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

3.1.

$$\begin{aligned} \langle \vec{\pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c r^2} \left(\frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \right)^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

$\langle \vec{\pi} \rangle$ est dirigé dans le sens de la propagation de l'onde.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \langle \vec{\pi} \rangle r dr d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\pi}{\mu_0 c} \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned}$$

En absence de dissipation $\langle \mathcal{P} \rangle$ est indépendante de z .

3.2. La norme du champ électrique est :

$$E = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{b}{a}}$$

E est max pour $r = a$:

$$E_M = \frac{V_1 - V_2}{a \ln \frac{b}{a}}$$

$$< \mathcal{P} > = \frac{\pi a^2}{\mu_0 c} \ln \frac{b}{a} E_M^2$$

AN :

$$< \mathcal{P} > = 5,6 \text{ kW}$$

4.1. Conditions aux limites (C_1 étant un conducteur parfait) :

$$\begin{aligned} \vec{B}(r=a) &= \mu_0 \vec{j}_{S_1} \wedge \vec{e}_r \\ \vec{e}_r \wedge \vec{B}(r=a) &= \mu_0 \vec{e}_r \wedge (\vec{j}_{S_1} \wedge \vec{e}_r) \end{aligned}$$

Or :

$$\vec{j}_{S_1} \cdot \vec{e}_r = 0$$

d'où :

$$\vec{j}_{S_1} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}(r=a)}{\mu_0}$$

Donc :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_0(r=a)}{\mu_0} \\ &= \frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c a \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{i}_1 &= \int_0^{2\pi} \vec{j}_{S_1} a d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

D'où :

$$I_1 = \|\underline{i}_1\| = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}}$$

$\underline{i}_1$ est une fonction de z et t , on peut donc parler d'une onde de courant.

4.2. De même que la question 4.1. :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{S_2} &= -\frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c b \ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \vec{e}_z \\ \vec{j}_2 &= -\frac{V_1 - V_2}{\mu_0 c b \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_z \\ I_2 &= -I_1 \end{aligned}$$

$\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$ sont en opposition de phase, ce qui assure le "retour" du courant.

4.3. Conditions aux limites :

★ en $r = a$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r=a) &= \frac{\underline{\sigma}_1}{\varepsilon_0} \vec{e}_r \\ \underline{\sigma}_1 &= \frac{\varepsilon_0}{a} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \\ \underline{\sigma}_1 &= \frac{\varepsilon_0}{a \ln \frac{b}{a}} \underline{v}(z, t) \end{aligned}$$

★ en $r = b$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r=b) &= \frac{\underline{\sigma}_2}{\varepsilon_0} \vec{e}_r \\ \underline{\sigma}_2 &= -\frac{\varepsilon_0}{b} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \\ \underline{\sigma}_2 &= -\frac{\varepsilon_0}{b \ln \frac{b}{a}} v(z, t)\end{aligned}$$

★ $\lambda_1 = ?$ et $\lambda_2 = ?$

Un anneau du conducteur (C_1) d'épaisseur dz , porte la charge :

$$\begin{aligned}dq_1 &= \int_0^{2\pi} \underline{\sigma}_1 a d\theta dz \\ &= \underline{\sigma}_1 2\pi a dz\end{aligned}$$

La densité linéique de (C_1) est :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{dq_1}{dz} = 2\pi a \underline{\sigma}_1 \\ \lambda_1 &= \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} v\end{aligned}$$

De même :

$$\lambda_2 = -\frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} v$$

Puisque $\lambda_1 = -\lambda_2$, les deux conducteurs se comportent, sur un élément dz , comme un condensateur en régime variable.

5.1. En notation réelle :

$$\vec{B} = \frac{V_1 - V_2}{rc \ln \frac{b}{a}} \cos(\omega t - \beta z) \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}d^3u_m &= \frac{B^2}{2\mu_0} r dr d\theta dz \\ du_m &= \frac{\pi}{\mu_0 c^2} \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \cos^2(\omega t - \beta z) dz\end{aligned}$$

or :

$$du_m = \frac{1}{2} L dz i_1^2$$

et puisque l'A.R.Q.S est valable dans un tronçon de longueur dz , alors i_1 a même valeur entre z et $z + dz$:

$$i_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \cos(\omega t - \beta z)$$

donc :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Remarque :

$$\begin{aligned}\vec{B}_0 &= \frac{V_1 - V_2}{rc \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

ce résultat est justifié puisque $dz \ll \lambda$, l'A.R.Q.S est valable et donc :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$$

5.2. L'énergie électrique contenue dans une longueur dz du câble est :

$$\begin{aligned} du_e &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 r dr d\theta dz \\ &= \pi \varepsilon_0 \frac{(V_1 - V_2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \cos^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} du_e &= \frac{1}{2} \Gamma dz v^2 \\ &= \frac{1}{2} \Gamma dz (V_1 - V_2)^2 \cos^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

★

$$L\Gamma = \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

AN : $L \simeq 0,26 \mu\text{H.m}^{-1}$ et $\Gamma \simeq 42,8 \text{ pF.m}^{-1}$.

6.1. On a :

$$\begin{aligned} \underline{v} &= (V_1 - V_2) \exp i(\omega t - \beta z) \\ \underline{i}_1 &= \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}} \exp i(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

donc :

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{v}}{\underline{i}_1} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

AN : $Z_c = 78 \Omega$.

On a :

$$Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

donc :

$$Z_c = cL$$

or :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L\Gamma}}$$

d'où :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{\Gamma}}$$

6.2.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}' \rangle &= \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{v} \cdot \underline{i}_1^*) \\ &= \frac{1}{2} (V_1 - V_2) I_1 \end{aligned}$$

or :

$$I_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{b}{a}}$$

d'où :

$$\langle \mathcal{P}' \rangle = \frac{\pi}{\mu_0 c \ln \frac{b}{a}} (V_1 - V_2)^2$$

Soit donc :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P}' \rangle$$

7. Il y aura dissipation d'énergie, donc atténuation de l'onde le long du câble coaxial.