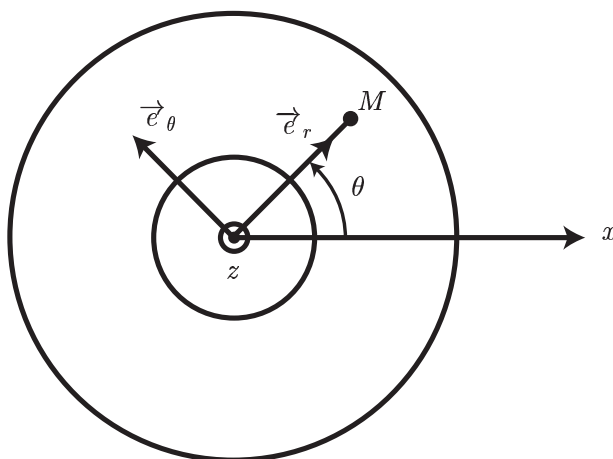


Mode TEM dans un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué par deux conducteurs cylindriques supposés parfaits (C_1) et (C_2), de même axe Oz , de rayons a et b ($a < b$) et de longueur infiniment grande. De l'air, assimilé au vide quant à ses propriétés électromagnétiques, règne dans l'espace entre les conducteurs.

Un point M de l'espace considéré est repéré par ses coordonnées cylindriques dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Le problème aborde l'étude de la propagation guidée d'ondes électromagnétiques le long de l'axe Oz entre les deux conducteurs.



Ces ondes sont progressives monochromatiques de pulsation ω :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(r, \theta) \exp i(\omega t - \beta z) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0(r, \theta) \exp i(\omega t - \beta z)$$

et leur recherche se limite aux modes TEM (Transverse Electro-Magnétique) pour lesquels $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} = 0$.

$\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont réels.

1. Montrer que :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 &= \vec{0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_0 &= \vec{0} \\ \vec{e}_z \wedge \beta \vec{E}_0 &= \omega \vec{B}_0 & \vec{e}_z \wedge \beta \vec{B}_0 &= -\omega \frac{\vec{E}_0}{c^2} \end{aligned} \quad \text{et}$$

On donne :

$$\vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{A}$$

2.1. Déterminer la constante de propagation β et en déduire une relation entre $\vec{B}$ et $\vec{E}$. Commenter.

2.2. Déterminer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g .

2.3. Montrer qu'il existe un potentiel $V(r, \theta)$ tel que $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} V$ et en déduire l'équation vérifiée par V dans l'espace interconducteur.

2.4. Soient V_1 et V_2 ($V_1 > V_2$) les potentiels des deux conducteurs (C_1) et (C_2) dans un plan de section droite. Justifier la recherche d'un potentiel indépendant de θ et calculer $V(r)$.

2.5. Déterminer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, les expressions des composantes $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$, et en déduire celles des champs $\vec{E}(r, z, t)$ et $\vec{B}(r, z, t)$.

3.1. Donner l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de POYNTING $\langle \vec{\pi} \rangle$ et son orientation ; en déduire la moyenne temporelle de la puissance $\langle P \rangle$ transmise par une section droite du câble.

3.2. Si a , b et la valeur maximale E_M de la norme du champ électrique sont imposés, déterminer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ pouvant être transmise.

Application numérique : Calculer P_M si $a = 2,4 \text{ mm}$; $b = 8,8 \text{ mm}$; $E_M = 3 \text{ kV.cm}^{-1}$.

4.1. Montrer qu'en tout point de la surface du conducteur (C_1), existe une densité de courant surfacique :

$$\underline{j}_{S1} = \vec{J}_1 \exp i(\omega t - \beta z)$$

dont l'amplitude est donnée par :

$$\vec{J}_1 = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{B}_0(r=a)}{\mu_0}$$

Calculer l'intensité du courant sur le conducteur (C_1), on exprimera son amplitude I_1 en fonction de V_1 , V_2 , a et b .

4.2. Reprendre la question précédente pour l'appliquer au conducteur (C_2). Comparer $\underline{i}_2$ et $\underline{i}_1$ et commenter.

4.3. Déterminer les densités surfaciques $\underline{\sigma}_1(z, t)$ et $\underline{\sigma}_2(z, t)$ sur les conducteurs (C_1) et (C_2) en fonction de l'onde de tension :

$$\underline{v}(z, t) = (V_1 - V_2) \exp i(\omega t - \beta z)$$

En déduire leurs charges linéiques $\underline{\lambda}_1$ et $\underline{\lambda}_2$ en fonction de $\underline{v}(z, t)$ et $\frac{a}{b}$. Commentaire.

5.1. En considérant que l'approximation des régimes quasi-stationnaires est réalisée dans un tronçon élémentaire de câble, déterminer l'énergie magnétique contenue dans une longueur dz de ce câble, et en déduire son inductance propre linéique L .

5.2. Déterminer l'énergie électrique contenue dans une longueur dz de ce câble, et en déduire son capacité linéique Γ ?

Quelle relation simple lie L et Γ ?

Application numérique : Calculer L et Γ si $a = 2,4 \text{ mm}$ et $b = 8,8 \text{ mm}$.

6.1. Quelle est l'expression de l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \frac{\underline{v}(z, t)}{\underline{i}_1(z, t)}$$

Application numérique : Calculer Z_c avec les valeurs de a et b précédentes. Donner l'expression simple de Z_c en fonction de L et Γ .

6.2. Calculer par les méthodes de l'électrocinétique la puissance moyenne $\langle P' \rangle$ transportée par le câble et la comparer à $\langle P \rangle$, puissance moyenne électromagnétique déterminée à la question **3.1**.

7. Que peut-on prévoir qualitativement sur la propagation dans un câble réel dont les conducteurs ne sont pas tout à fait parfaits et dont l'espace interconducteur n'est évidemment pas du vide ?