

En déduire qu'en $z = 0$, les champs $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_i$ sont en opposition de phase, et puis comme conséquence, que les champs $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_i$ y sont en phase.

- b) Il s'agit à présent d'opérer un passage à la limite du conducteur réel au conducteur parfait sur les résultats de la question 3.

Donner pour $z = 0$ les expressions de $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$, $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$, $\vec{B}_t$ pour la limite du conducteur parfait.

La valeur de $\vec{B}_t$ n'est pas celle de la question précédente 4a). Quelle est l'hypothèse faite à la question 3 et qui est responsable de cette contradiction ? Pourquoi n'est-elle pas valable ici ?

Déterminer alors dans le cas du conducteur parfait, la densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ complexe, en exprimant son amplitude en fonction de ϵ_0 , c et E^0 .

Interpréter physiquement la direction de ce vecteur en pensant à l'origine de ce courant. Quel phénomène peut-on comprendre par l'existence de cette nappe de courant harmonique ?

- 1.a) La divergence des deux membres de la loi d'Ohm donne avec la loi de conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon_0}$:

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \text{div } \vec{E}_t \Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}}$$

AN : $\tau = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$

Remarque : Pour ces temps-là, $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ n'est plus valable puisque cette équation qui traduit la dissipation (c'est $I = U/R$) nécessite de travailler sur des intervalles de temps supérieurs en gros à 10^{-14} s (temps moyen entre "chocs successifs"). τ apparaît comme le temps caractéristique pendant lequel s'écoule le supplément de charge de densité ρ_0 en un point du métal. Étant infiniment petit devant la période des ondes,

on suppose par la suite

$$\boxed{\rho = 0}$$

- b) L'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$ donne

$$\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\epsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \right|}{\sigma |\vec{E}_t|} = \frac{\epsilon_0 \omega E_t^0}{\sigma E_t^0} = \omega \tau \ll 1 \text{ d'où } \boxed{|\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|}$$

- c) Avec $\mu_0 \vec{j} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sigma \vec{E}_t = \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t$ et compte tenu des deux approximations précédentes :

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{B}_t = 0 & \operatorname{div} \vec{E}_t = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B}_t = \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t \end{array}$$

2.a) – Les conditions de passage sont vraies $\forall t$ ce qui suppose une même variation temporelle des champs, c'est-à-dire même pulsation ; ceci a déjà été utilisé à la question 1b).

– Au changement de milieu (vide-métal imparfait) correspond celui de la vitesse de phase ; la longueur d'onde et le module du vecteur d'onde sont donc modifiés. La loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ traduit une dissipation permettant de prévoir k' complexe (l'amplitude du champ décroît avec la pénétration dans le métal).

– L'origine de la phase est fixée par choix de l'origine des temps sur $\vec{E}_i$. Le passage dans le métal peut s'accompagner en $z = 0$ d'un déphasage φ à la transmission soit $\underline{t} = |\underline{t}| e^{i\varphi}$ complexe.

– C'est la solution la plus simple et physique pour un métal homogène isotrope. Elle est expérimentalement vérifiée et permet de satisfaire les conditions de passage sur les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (voir exercice 5.9 pour le champ de rayonnement).

$$b) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}_t) \Rightarrow \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t = -\frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

d'où

$$\Delta \vec{E}_t = \frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

Ce n'est pas une équation de d'Alembert (type corde vibrante ou acoustique), mais une équation de type "diffusion de la chaleur" (voir O.M. chapitre 5).

c) En notation complexe $\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} E^0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_x$, l'équation ci-dessus donne

$$-k'^2 = \frac{1}{\tau c^2} i\omega \Rightarrow k' = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\tau c^2}}$$

Souhaitant une propagation suivant les z croissants, soit $\operatorname{Re}(k') > 0$, il vient

$$k' = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = c \sqrt{\frac{2\tau}{\omega}}$$

Le champ s'écrit alors

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} E^0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$$

Son amplitude s'amortit d'un facteur e sur une profondeur δ , appelée "profondeur de pénétration" ou "épaisseur de peau".

d) Vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(k')} = \omega\delta = c\sqrt{2\omega\tau}$, soit

$$\alpha = \sqrt{2\omega\tau}$$

e) δ et v_φ dépendent de ω : il y a dispersion, c'est-à-dire que le conducteur n'a pas le même comportement vis à vis d'ondes de fréquence différentes.

	$\nu = 50 \text{ Hz}$	$\nu = 50 \text{ MHz}$
δ	1 cm	10 μm
$\lambda = c/\nu$	6000 km	6 m
δ/λ	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
$\alpha = v_\varphi/c$	10^{-8}	10^{-5}

L'effet de peau (ainsi appelé car δ est faible) est plus sensible en fréquence hertzienne qu'en fréquence industrielle. Dans tous les cas l'onde dans le métal se propage très lentement ($\alpha \ll 1$) et s'amortit très vite ($\delta/\lambda \ll 1$).

3.a) $\vec{E}_r = rE^0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$ (justification du même ordre qu'en 2a))

b) Pour une OPP dans le vide, $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans le sens de la propagation.

pour $\vec{E}_i$ ($\vec{u} = \vec{u}_z$) soit

pour $\vec{E}_r$ ($\vec{u} = -\vec{u}_z$) soit

$$\begin{aligned}\vec{B}_i &= \frac{E^0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_r &= -\frac{rE^0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y\end{aligned}$$

* Oui avec prudence, $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}' \wedge \vec{E}_t}{\omega}$ avec $\vec{E}_t = tE^0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$ et $\vec{k}' = \frac{1-i}{\delta} \vec{u}_z$.

d'où $\vec{B}_t = \frac{1-i}{\delta\omega} tE^0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_y \Rightarrow$

$$\vec{B}_t = (1-i)t \frac{E^0}{c\alpha} e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_y$$

* Sinon il suffit de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E}_t = -ik' tE^0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$$

d'où $\vec{B}_t = \frac{k'}{\omega} tE^0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_y$ avec $\frac{k'}{\omega} = \frac{1-i}{\delta\omega} = \frac{1-i}{c\alpha}$

- c) La composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue en $z = 0$: $1 + \underline{r} = \underline{t}$.

A ce niveau, la densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ (qui est une grandeur macroscopique) n'a pas de sens ; la continuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$ en $z = 0$ conduit à : $1 - \underline{r} = \frac{1-i}{\alpha} \underline{t}$

La résolution est simple :

$$\underline{r} = \frac{\alpha - 1 + i}{\alpha + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i}$$

- d) En **moyenne temporelle** le vecteur de Poynting s'écrit $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$

d'où en $\underline{z} = 0$, $\langle \vec{R}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$, $\langle \vec{R}_r \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} |\underline{r}|^2 \vec{u}_z$

et $\langle \vec{R}_t \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c \alpha} \text{Re} [\underline{t}(1+i)\underline{t}^*] \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c \alpha} |\underline{t}|^2 \vec{u}_z$

En incidence normale, il n'y a pas de facteur d'obliquité entre $\vec{R}$ et $d\vec{S}$ pour le calcul de la puissance ; les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont alors simplement définis par

$$R = \frac{|\langle \vec{R}_r \rangle|}{|\langle \vec{R}_i \rangle|} = |\underline{r}|^2 = \frac{(\alpha - 1)^2 + 1}{(\alpha + 1)^2 + 1} \quad \text{et} \quad T = \frac{|\langle \vec{R}_t \rangle|}{|\langle \vec{R}_i \rangle|} = \frac{|\underline{t}|^2}{\alpha} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2 + 1}$$

soit $\underline{R} + \underline{T} = 1$ qui traduit la conservation du flux d'énergie au niveau de l'interface (en l'absence d'absorbance).

avec $\alpha \ll 1$, $R \simeq \frac{-2\alpha + 2}{2\alpha + 2} \simeq 1 - 2\alpha$, d'où

$$T \simeq 2\alpha$$

AN : $\nu = 50 \text{ Hz}$, $\underline{T} = 2.10^{-8}$; $\nu = 50 \text{ MHz}$, $\underline{T} = 2.10^{-5}$

Très peu d'énergie électromagnétique pénètre dans le métal qui se comporte comme un très bon réflecteur. Dans la pratique, une plaque de très faible épaisseur ($\simeq 10\delta$) suffit, pour servir d'écran électromagnétique (c'est le rôle d'un grillage métallique autour d'une station radio).

- 4.a) Dans un conducteur parfait, il n'y a pas de dissipation ; sa conductivité σ est infinie;

alors $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \rightarrow 0$, $\delta = c\sqrt{\frac{2\tau}{\omega}} \rightarrow 0$ (pour $\omega \neq 0$) et

$$\alpha = \sqrt{2\tau\omega} \rightarrow 0, \quad \forall \omega$$

L'épaisseur de peau δ tend vers 0 et la vitesse de phase $v_\varphi = c\alpha$ aussi, donc les champs ne pénètrent pas dans le métal, soit $\vec{E}_t = \vec{0}$ et $\vec{B}_t = \vec{0}$.

La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ s'écrit en $z = 0$:

$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_r = -\vec{E}_i$, les champs électriques sont en opposition de phase sur le métal, d'où $\vec{B}_r = \frac{(-\vec{u}_z) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \vec{B}_i$, les champs magnétiques sont en phase sur le métal.

b) Pour $\alpha \rightarrow 0$, $\underline{r} \rightarrow -1$ et $\underline{t} \rightarrow 0$,

mais pour $\vec{B}_t$ il faut la limite de $\frac{\underline{t}}{\alpha} = \frac{2}{\alpha + 1 - i} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{1 - i}$

d'où en $z = 0$: $\vec{E}_i = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$, $\vec{E}_r \rightarrow -E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$, $\vec{E}_t \rightarrow \vec{0}$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y, \quad \vec{B}_r \rightarrow \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y, \quad \vec{B}_t \rightarrow \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

On vérifie sur ces expressions les conditions de continuité :

* $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t = \vec{0}$ toujours valable pour la composante tangentielle de $\vec{E}$.

* $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y$ valable uniquement pour la composante tangentielle de $\vec{B}$ au plan microscopique.

L'épaisseur de peau δ tendant vers 0, la densité volumique de courant $\vec{j}$ tend vers $\vec{0}$ sauf sur la surface même ce qui nous amène à considérer un point de vue macroscopique et définir une densité superficielle de courant $\vec{j}_S$.

La composante tangentielle de $\vec{B}$ subit alors une discontinuité (concept macroscopique) qui se traduit en $z = 0$ par $\vec{B}_t - (\vec{B}_i + \vec{B}_r) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$ avec bien sûr $\vec{B}_t = \vec{0}$

$$\text{alors } \vec{0} - \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z \Rightarrow$$

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

Le champ incident $\vec{E}_i$ met les électrons libres de la surface du métal en mouvement forcé suivant sa direction Ox , d'où $\vec{j}_S$ parallèle à $\vec{u}_x$. Cette nappe de courant harmonique engendre à son tour par rayonnement, une nouvelle onde plane qui n'est autre que l'onde réfléchie (voir exercice 5.9).