

d) en basses fréquences $\omega\tau \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$:

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega}\right) \simeq -i \frac{\omega \omega_p^2 \tau}{c^2} \quad \text{car } \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \gg 1$$

d'où $k = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \omega_p^2 \tau}{c^2}}$ ($\text{Re}(k) > 0$ pour une propagation suivant Ox^+)

$$\Rightarrow \boxed{k = (1-i)/\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2c^2}{\omega \omega_p^2 \tau}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} \quad \text{car } \sigma_0 = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tau$$

Le terme de phase de l'onde s'écrit alors :

$$e^{i(\omega t - kx)} = e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

on retrouve l'épaisseur de peau δ vue à la question B2.c) et une onde amortie décrite dans l'exercice 3.8.

e) en très hautes fréquences $\omega\tau \gg 1 \Rightarrow$

$$\boxed{k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2}$$

- pour $\omega \leq \omega_p$ (avec cependant $\omega \ll 1/\tau$); $k^2 < 0$ et donc k imaginaire pur : l'onde ne se propage pas ; elle est évanescente. Un faisceau de lumière visible ($\omega < \omega_p$) est donc réfléchi par la surface du conducteur, ce qui lui confère son aspect métallique.

- pour $\omega \geq \omega_p$, k est réel et l'onde se propage ; la relation $k(\omega)$ n'étant pas linéaire, il y a dispersion (avec $v_g \cdot v_\varphi = c^2$) dans la zone de "transparence" du métal.

Ce comportement est celui observé par une onde dans un plasma ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où σ imaginaire pur) ; la pulsation plasma est cependant nettement inférieure car le plasma est bien moins dense que le métal (voir introduction du chapitre 4) ; il permet en particulier de propager jusqu'à des ondes hertziennes ce que le métal ne permet pas.

3.8 Réflexion - transmission sur un conducteur réel

Un métal isotrope, non magnétique, possède une conductivité électrique σ scalaire réelle et finie. Il occupe la partie de l'espace $z > 0$, sa surface étant confondue avec le plan xOy . La partie de l'espace $z < 0$ est assimilée à du vide pour lequel la célérité des ondes électromagnétiques est $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Une onde électromagnétique incidente, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement suivant Ox se propage dans le vide vers les z croissants ; en écriture complexe, son champ électrique est $\vec{E}_i = E^0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ où l'amplitude E^0 est réelle par choix de l'origine sur t .

Elle tombe sur le métal en $z = 0$ et y engendre une onde réfléchie et une onde transmise de champs électriques $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$. On admet que les équations de Maxwell dans le vide sont valables dans le conducteur à condition d'y adjoindre la relation constitutive dite loi d'Ohm sous la forme $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant.

Les applications numériques sont faites pour la conductivité électrique du cuivre, soit $\sigma = 0,57 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Équations de Maxwell approchées dans le conducteur

- Supposons qu'en un point intérieur du conducteur, existe à l'instant $t = 0$ un supplément local de charge correspondant à une densité volumique ρ_0 . A partir de la loi d'Ohm, de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge, donner la loi $\rho(t)$ en ce point et montrer que la densité initiale disparaît en un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression.
Donner la valeur numérique de τ et la commenter.
Quelle approximation (classique en électrostatique) peut-on faire par la suite ?
- Montrer que le terme dit "courant de déplacement" de l'équation de Maxwell-Ampère peut être négligé devant la densité volumique de courant lorsque se propagent dans le métal des ondes de pulsation $\omega < 10^{15} \text{ rad/s}$ (la même que celle du champ incident) ; la conductivité σ en régime harmonique est celle donnée en introduction.
- Écrire à l'aide des deux approximations précédentes, les équations de Maxwell où ne figurent que les champs $\vec{E}_t$ et $\vec{B}_t$ et les constantes c et τ .

2. Structure du champ électrique transmis

En écriture complexe, on cherche $\vec{E}_t$ sous la forme $\vec{E}_t = \underline{t} E^0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$

- Justifier, **sans calculs**, par des arguments simples :
 - que la pulsation ω de $\vec{E}_t$ est la même que celle de $\vec{E}_i$.
 - que le nombre d'onde k' n'est pas égal à k . Que permet de prévoir sur k' l'utilisation de la loi d'Ohm ?
 - pourquoi le coefficient de transmission en amplitude $\underline{t}$ est-il a priori pris complexe ?
 - que la polarisation de $\vec{E}_t$ est rectiligne de même direction que celle de $\vec{E}_i$.
- Donner à partir des équations de Maxwell écrites en 1c), l'équation différentielle satisfaite par $\underline{t}$.
Dans quel autre domaine de la physique se rencontre une équation différentielle de ce type ?

c) Obtenir la relation entre k' et ω (équation de dispersion) et justifier que l'unique solution acceptable pour k' est $k' = (1 - i)/\delta$.
Donner l'expression de δ en fonction de c , τ et ω et justifier sa dénomination de profondeur de pénétration.

d) Donner la vitesse de phase v_φ de l'onde dans le métal et la mettre sous la forme $v_\varphi = c\alpha$ où α est une grandeur sans dimension à exprimer en fonction de ω et τ .

e) δ et v_φ dépendent de ω : quel est le nom de ce phénomène ?

AN : Donner sous forme de tableau, les grandeurs δ , λ (longueur d'onde dans le vide), δ/λ et α pour le cuivre dans les deux cas suivants : la fréquence des ondes est $\nu = 50$ Hz, puis $\nu = 50$ MHz. Commenter.

3. Calcul du coefficient de transmission en énergie

Outre l'onde transmise, l'onde incidente donne lieu en $z = 0$ à une onde réfléchie de champ électrique noté $\underline{\vec{E}}_r$ en écriture complexe.

a) Donner sans calcul son expression en notant $\underline{r}E^0$ son amplitude complexe.

b) Rappeler la relation entre champ électrique et magnétique pour une onde plane progressive dans le vide et en déduire l'expression des champs $\underline{\vec{B}}_i$ et $\underline{\vec{B}}_r$.

Le même procédé peut-il s'appliquer pour déterminer $\underline{\vec{B}}_t$ à partir de $\underline{\vec{E}}_t$?

– si oui, l'expliciter ;

– si non, revenir à une équation de Maxwell.

Donner l'expression de $\underline{\vec{B}}_t$, où dans l'amplitude apparaît $\underline{t}E^0$, c et α .

c) Quelle relation entre $\underline{r}$ et $\underline{t}$ donne la condition de passage du champ électrique en $z = 0$?

A ce niveau, on admet également la **continuité** du champ magnétique en $z = 0$.

Quelle autre relation sur $\underline{r}$ et $\underline{t}$ cela donne-t-il ?

En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de α .

d) Définir et calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Expliquer la relation simple entre R et T . Donner les valeurs approchées de R puis de T en tenant compte du fait que $\alpha \ll 1$.

AN : Calculer T pour $\nu = 50$ Hz puis $\nu = 50$ MHz et conclure.

4. Limite du conducteur parfait

a) Dans cette sous-question, ne pas se servir de la question 3.
Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Quelle est la limite de δ (pour $\omega \neq 0$). Montrer que la limite de α , à préciser, est indépendante de la valeur de ω comprise entre 0 et 10^{15} rad/s.

En déduire, pour un raisonnement physique simple, la valeur des champs $\underline{\vec{E}}_t$ et $\underline{\vec{B}}_t$ dans le conducteur parfait.

En déduire qu'en $z = 0$, les champs $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_i$ sont en opposition de phase, et puis comme conséquence, que les champs $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_i$ y sont en phase.

- b) Il s'agit à présent d'opérer un passage à la limite du conducteur réel au conducteur parfait sur les résultats de la question 3.

Donner pour $z = 0$ les expressions de $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$, $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$, $\vec{B}_t$ pour la limite du conducteur parfait.

La valeur de $\vec{B}_t$ n'est pas celle de la question précédente 4a). Quelle est l'hypothèse faite à la question 3 et qui est responsable de cette contradiction ? Pourquoi n'est-elle pas valable ici ?

Déterminer alors dans le cas du conducteur parfait, la densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ complexe, en exprimant son amplitude en fonction de ϵ_0 , c et E^0 .

Interpréter physiquement la direction de ce vecteur en pensant à l'origine de ce courant. Quel phénomène peut-on comprendre par l'existence de cette nappe de courant harmonique ?

- 1.a) La divergence des deux membres de la loi d'Ohm donne avec la loi de conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon_0}$:

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \text{div } \vec{E}_t \Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

AN : $\tau = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$

Remarque : Pour ces temps-là, $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ n'est plus valable puisque cette équation qui traduit la dissipation (c'est $I = U/R$) nécessite de travailler sur des intervalles de temps supérieurs en gros à 10^{-14} s (temps moyen entre "chocs successifs"). τ apparaît comme le temps caractéristique pendant lequel s'écoule le supplément de charge de densité ρ_0 en un point du métal. Étant infiniment petit devant la période des ondes,

on suppose par la suite

$$\rho = 0$$

- b) L'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$ donne

$$\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\epsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \right|}{\sigma |\vec{E}_t|} = \frac{\epsilon_0 \omega E_t^0}{\sigma E_t^0} = \omega \tau \ll 1 \text{ d'où } |\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|$$

- c) Avec $\mu_0 \vec{j} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sigma \vec{E}_t = \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t$ et compte tenu des deux approximations précédentes :