

Corrigé du problème A : conductivité d'anneaux mésoscopiques

A.1 Ligne bifilaire supraconductrice au niobium

A.1.1 - Inductance linéique Λ en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ (henry par mètre) - Capacité linéique Γ en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ (farad par mètre) - La supraconductivité est caractérisée par une résistance au courant nulle, ce qui justifie le fait qu'il n'y ait pas de résistance dans le modèle.		
A.1.2 Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) conduisent à : $\begin{cases} \overbrace{u(x,t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}}^{\text{tension aux bornes de la bobine}} + u(x+dx,t) \\ i(x+dx,t) = \underbrace{-\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{intensité dans la branche du condensateur}} + i(x,t) \end{cases}$ Soit, en se limitant à l'ordre 1 : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} & (2) \end{cases}$		
A.1.3 En combinant les équations (1) et (2), on arrive à :	$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (3) \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 & (4) \end{cases}$	
A.1.4 Les deux équations sont identiques. Ce sont des équations de propagation de d'Alembert. La quantité $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$ représente la vitesse de propagation dans la ligne bifilaire.		

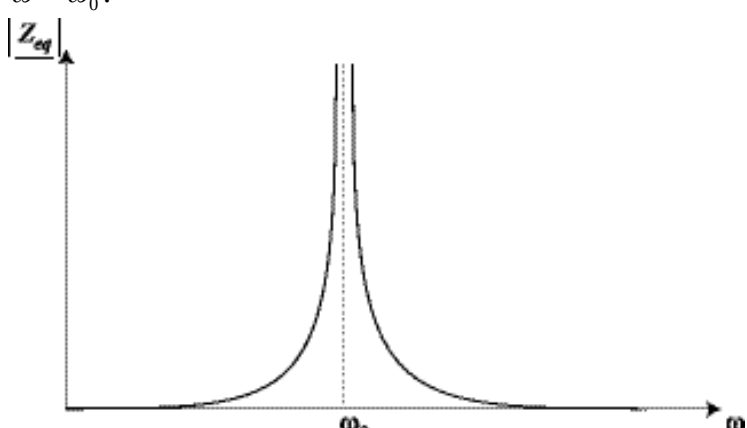
A.2 Calcul de la capacité linéique de la ligne bifilaire

A.2.1 Proposition de rédaction pour le calcul du champ électrique : - Système de coordonnées : cylindriques (axe (Oz) = axe du fil) - Symétries : le plan contenant le fil infini et passant par un point M quelconque de l'espace (en dehors du fil) est plan de symétrie, donc le champ électrique est contenu dans ce plan. Le plan orthogonal passant par M est aussi un plan de symétrie. Conclusion : le champ électrique est à l'intersection de ces deux plans, il est donc radial $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$ - Invariances : toute rotation autour du fil laisse invariante la distribution de courant et toute translation parallèlement au fil aussi. Autrement dit le champ électrique ne dépend que de la variable de distance r : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ - Calcul par le théorème de Gauss : - Choix de la surface de Gauss : le cylindre d'axe le fil, passant par M, de hauteur H quelconque et avec deux couvercles. - Théorème de Gauss : $\oint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{qH}{\epsilon_0 \epsilon_{\text{eff}}} = 2\pi r H E$ soit : $E = \frac{q}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_{\text{eff}}}$		
---	--	--

A.2.2 Champ électrique créé par la ligne positive en un point $M(x, y, 0)$: $\vec{E}_+ = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \frac{1}{d-y} (-\vec{e}_y)$ Champ électrique créé par la ligne négative en un point $M(x, y, 0)$: $\vec{E}_- = \frac{q}{2\pi\epsilon_{eff}} \frac{1}{d+y} (-\vec{e}_y)$ Champ total entre les fils : $\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \left(\frac{1}{d-y} + \frac{1}{d+y} \right) (-\vec{e}_y)$		
A.2.3 Circulation du champ électrique : $C_{+\rightarrow-} = \int_{chemin} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \left[\ln\left(\frac{d+y}{d-y}\right) \right]_{-d+a}^{d-a}$ $= \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \left[\ln\left(\frac{2d-a}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{2d-a}\right) \right]$ $= \frac{q}{\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \ln\left(\frac{2d-a}{a}\right) \approx \frac{q}{\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \ln\left(\frac{2d}{a}\right)$ Le champ électrique vérifiant $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, on a donc immédiatement : $V_+ - V_- = C_{+\rightarrow-} = \frac{q}{\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}} \ln\left(\frac{2d}{a}\right)$		
A.2.4 La charge d'une portion $d\ell$ de ligne est $dq = q \cdot d\ell$, la relation entre la charge et la tension aux bornes d'un condensateur ($Q = CU$) conduit à $C = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}}{\ln(2d/a)} d\ell$, soit une capacité linéique $\Gamma = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}}{\ln(2d/a)}$.		

A.3 Résonances de la ligne bifilaire et impédance équivalente

A.3.1.a On injecte $\underline{u}_+(x, t) = U_+ e^{j(\omega t - kx)}$ dans l'équation (3) d'où $-k^2 + \underbrace{\Gamma\Lambda}_{1/c^2} \omega^2 = 0$ Soit $\boxed{\omega = k \cdot c}$ (Relation de dispersion)		
A.3.1.b On avait trouvé $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} & (2) \end{cases}$ avec $\frac{\partial \bullet}{\partial x} \leftrightarrow -jk \bullet$ et $\frac{\partial \bullet}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \bullet$ D'où l'on tire immédiatement : $jk\underline{u}_+ = j\omega\Lambda\underline{i}_+$ et donc $\boxed{Z_C = \frac{\Lambda\omega}{k} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}$. Ce rapport défini par une tension sur un courant est une impédance : c'est l'<u>impédance caractéristique</u> de la ligne.		
A.3.2 Pour une onde dans le sens des x décroissants : $\underline{u}_- = U_- e^{j(\omega t + kx)}$ et $\underline{i}_- = I_- e^{j(\omega t + kx)}$. En reprenant le même type de calculs que dans la question A.3.1.b, il vient $\boxed{\frac{\underline{u}_-}{\underline{i}_-} = -Z_C}$. Il faut noter la présence du signe moins venant du changement du sens de propagation de l'onde.		

A.3.3 On a les relations suivantes : $U_+ = Z_C I_+$ et $U_- = -Z_C I_-$ d'où $\begin{cases} \underline{u}(x, t) = U_+ e^{j(\omega t - kx)} + U_- e^{j(\omega t + kx)} \\ \underline{i}(x, t) = \frac{1}{Z_C} (U_+ e^{j(\omega t - kx)} - U_- e^{j(\omega t + kx)}) \end{cases}$ On a la condition d'annulation du courant en $x = 0$: $i(0) = 0$ donc $\boxed{U_+ = U_-}$ On en déduit $\underline{Z}(x) = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_+ (e^{-jkx} + e^{jkx})}{U_+ (e^{-jkx} - e^{jkx})} Z_C = j \frac{Z_C}{\tan(kx)}$		
A.3.4 Impédance d'entrée : $\underline{Z}_e = \underline{Z}(x = \ell) = j \frac{Z_C}{\tan(k\ell)}$		
A.3.5.a En parallèle, l'admittance équivalente est égale à la somme des admittances. Ce qui revient à dire que l'impédance équivalente à deux impédances branchées en parallèle est égale au rapport du produit sur la somme des impédances. On a donc : $\underline{Z}_{eq} = \frac{jL\omega \times \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = -j \frac{L/C}{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = -j \frac{Z_0}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ proposée, on a : $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Z_0 = \sqrt{L/C} \end{cases}$ Il s'agit bien d'une expression du même type que $\underline{Z}_e = j \frac{Z_C}{\tan(k\ell)}$ avec $\begin{cases} \tan(k\ell) = \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \\ Z_0 = Z_C \end{cases}$, donc le modèle proposé est bien équivalent à la ligne du point de vue du générateur.		
A.3.5.b On trace le module de $\underline{Z}_{eq}$ en fonction de la pulsation. Il y a un phénomène de résonance pour $\omega = \omega_0$. 		
A.3.6 On a une résonance pour $\omega = \omega_0$ soit pour $\tan(k\ell) = -\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} = 0$. La fonction tangente s'annule pour les multiples de π, on a donc $k\ell = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Or, $\boxed{\omega = k \cdot c = n\pi \frac{1}{\ell \sqrt{\Lambda \Gamma}}}$ On retrouve les pulsations de résonance d'une corde tendue ou d'un tuyau sonore (ondes		

stationnaires dans ces systèmes)		
A.3.7 La fréquence du fondamental valant $f_1 = 320 \text{ MHz}$, on a $c = 2\ell f_1$ soit numériquement $c = 1.24 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (inférieure à la vitesse de la lumière car $\epsilon_{\text{eff}} > 1$).		

A.4 Quantification du flux magnétique à travers un anneau

A.4.1 $\Phi = \iint_{\text{anneau}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{anneau}} B dS = BS = \pi R^2 B$. Le flux magnétique s'exprime en weber (Wb) ou en tesla. mètre carré ($\text{T} \cdot \text{m}^2$).		
A.4.2 Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, un électron est soumis à la force de Lorentz (on néglige toutes les autres forces comme la force de pesanteur par exemple). Le principe fondamental de la dynamique conduit à $m\vec{a} = -e(\vec{v} \wedge \vec{B})$. En projetant cette relation sur le vecteur radial de la base polaire, on arrive à $-m \frac{v^2}{R} = -evB$ soit encore $v = \frac{eBR}{m} = \frac{\pi R^2 B e}{m\pi R} = \frac{e\Phi}{\pi R m}$.		
A.4.3.a La constante de Planck s'exprime en J.s soit encore en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Un moment cinétique ($m.r.v$) s'exprime aussi en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: c'est la même unité que la constante de Planck.		
A.4.3.b En appliquant la condition de Bohr, on arrive à $L = mRv = n \frac{h}{2\pi}$ or $mRv = \frac{e\Phi}{\pi}$ donc: $\Phi = n \frac{h}{2e}$. Le flux magnétique est donc quantifié, c'est un multiple du quantum de flux $\Phi_1 = \frac{h}{2e}$.		
A.4.3.c Application numérique : $\Phi_1 \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$		
A.4.4 Le fondamental s'écrit tout simplement $I(\Phi) = I_0 \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_1}\right)$		

A.5 Couplage d'anneaux isolés à la ligne bifilaire

A.5.1 On estime sur la microphotographie la largeur des carrés à environ $2 \mu\text{m}$.		
A.5.2 Proposition de rédaction pour le calcul du champ magnétique : • Système de coordonnées : cylindriques (axe (Oz) = axe du fil) • Symétries : le plan contenant le fil infini et passant par un point M quelconque de l'espace (en dehors du fil) est plan de symétrie, donc le champ magnétique y est orthogonal. Autrement dit, le champ magnétique est orthoradial (les lignes de champ sont des cercles) $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$ • Invariances : toute rotation autour du fil laisse invariante la distribution de courant et toute translation parallèlement au fil aussi. Autrement dit le champ magnétique ne dépend que de la variable de distance r : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$ • Calcul par le théorème d'Ampère : - Choix du contour d'Ampère : le cercle passant par M de rayon r, d'axe le fil - Théorème d'Ampère : $\oint_{\text{cercle}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ où nous avons orienté le contour dans le sens donné par la main droite de telle façon que la circulation soit positive. On		