

Les calculatrices sont autorisées.

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Certaines des questions peuvent donner lieu à une application numérique, une attention toute particulière y sera donnée lors de la correction de ce problème.

Les candidats doivent respecter les notations des énoncés et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.

DOSSIER REMIS AUX CANDIDATS

- Texte de présentation (13 pages)
- Document réponse pour le problème B (3 pages)

L'épreuve comporte deux problèmes totalement indépendants. Dans chaque problème, de nombreuses questions sont indépendantes.

PROBLEME A : CONDUCTIVITE D'ANNEAUX MESOSCOPIQUES ISOLÉS

Un système mésoscopique est un échantillon à une échelle intermédiaire entre la matière à l'état microscopique (l'atome) et macroscopique (le solide). Sa taille, micrométrique, lui confère un grand nombre d'électrons qui, si la température est assez basse (typiquement de l'ordre de quelques centièmes de degrés Kelvin), vont conserver leur « cohérence quantique ». La physique mésoscopique est une physique récente, qui se développe avec l'avancée des nanotechnologies.

On sait fabriquer par lithographie des petits anneaux carrés de quelques micromètres de côté dans lesquels des électrons sont contraints de se déplacer. Un champ magnétique constant imposé perpendiculairement au plan de l'anneau va forcer les électrons à tourner dans l'anneau, créant ainsi un courant permanent. Il apparaît que la valeur de ce courant est une fonction périodique du flux magnétique. Pour mesurer ce courant, les anneaux sont couplés à un résonateur formé d'une ligne bifilaire en régime harmonique.

A.1 LIGNE BIFILAIRE SUPRACONDUCTRICE AU NIOBIUM

La ligne bifilaire est un micro-résonateur constitué de deux fils parallèles d'une longueur ℓ et distants de $2d$. Celui-ci est fabriqué par lithographie optique sur un substrat de saphir. Afin de limiter la dissipation par effet Joule, un supraconducteur, le niobium, a été choisi comme matériau constitutif de la ligne. Enfin, pour minimiser la taille du résonateur, une géométrie en méandre a été adoptée (voir figure 1).

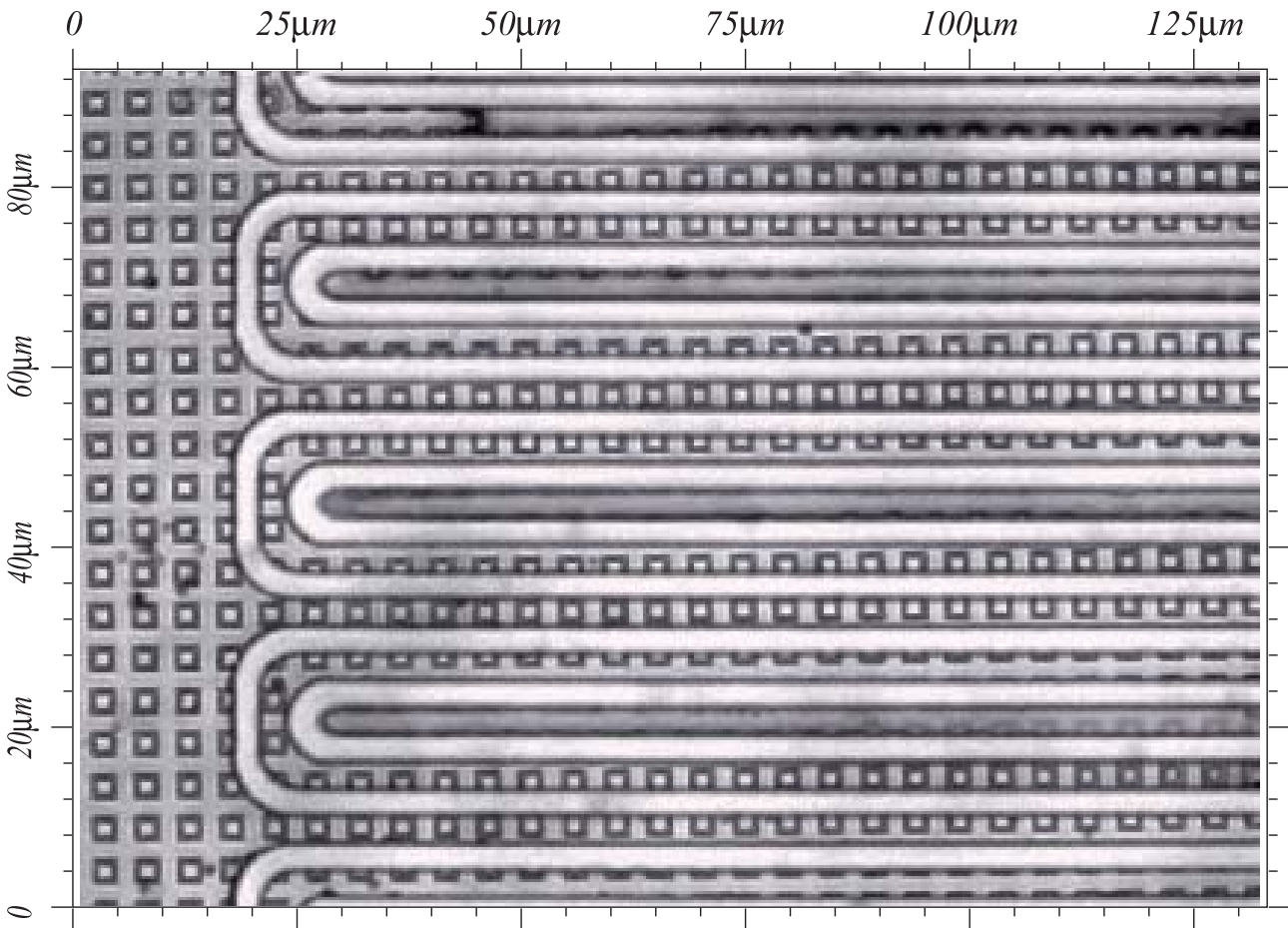


Figure 1 : microphotographie optique d'une partie de la ligne bifilaire en méandre et de ses anneaux mésoscopiques carrés.

Dans cette partie, on cherche à établir l'équation de propagation des ondes de courant dans la ligne. Pour ce faire, la ligne est « déployée » sur toute sa longueur ℓ . Le modèle de lignes à constantes réparties est le suivant : on isole une portion de la ligne entre les abscisses x et $x + dx$. Le schéma électrique équivalent est donné par la figure 2. On notera que Λ est l'inductance linéique (inductance par unité de longueur) et que Γ est la capacité linéique. On remarquera que l'axe des x est orienté de la droite vers la gauche.

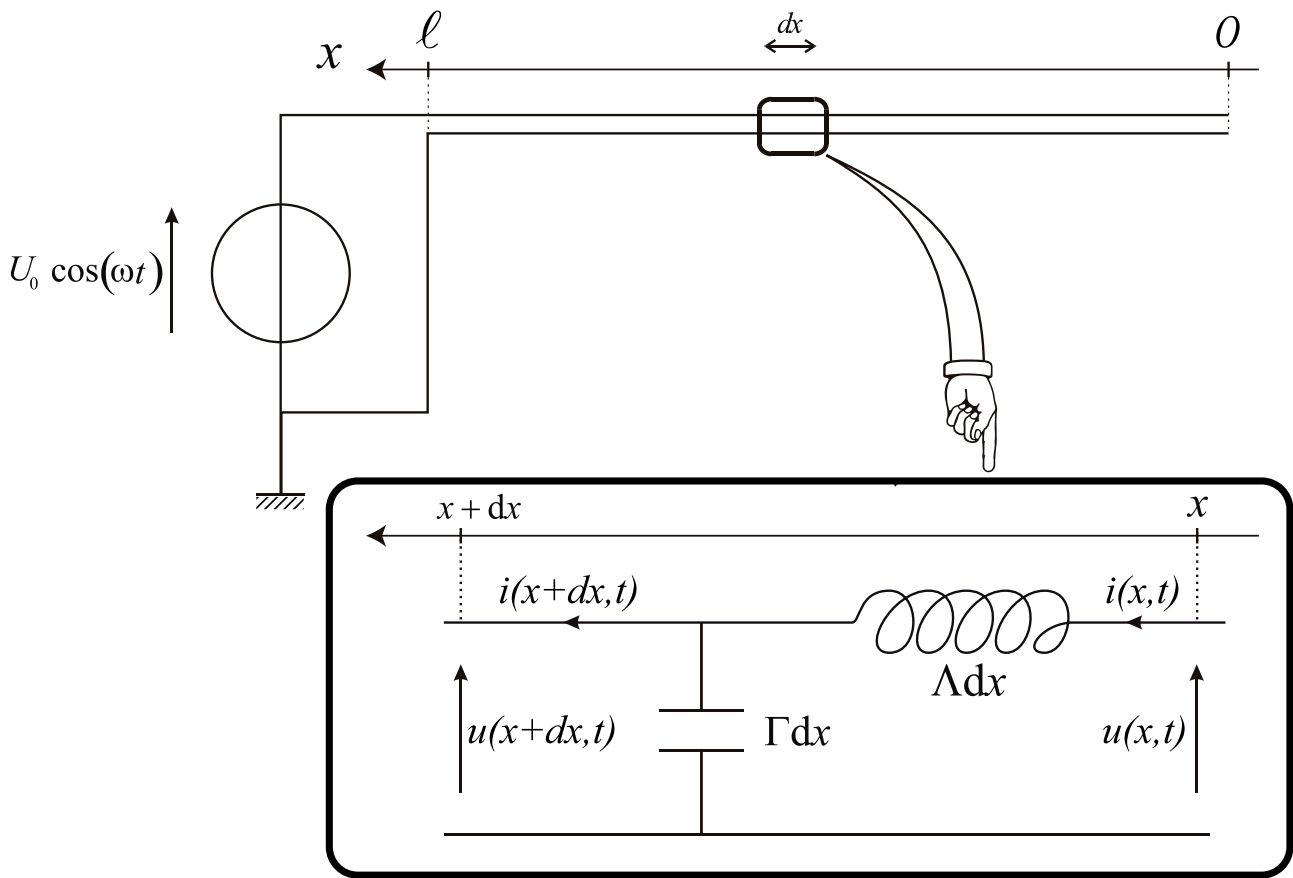


Figure 2 : ligne bifilaire et portion de largeur dx

- A.1.1** Quelles sont les unités de Λ et de Γ ? Justifier rapidement le fait qu'il n'y ait pas de résistors dans ce modèle.
- A.1.2** En se limitant à des termes du premier ordre, établir une relation entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$ d'une part, et une seconde entre $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$ d'autre part.
- A.1.3** Déterminer alors l'équation différentielle régissant l'évolution de $u(x, t)$ et celle régissant l'évolution de $i(x, t)$.
- A.1.4** Quelle remarque peut-on faire quant à ces deux équations ? Que traduisent-elles physiquement ? Que représente la quantité $\frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$?

A.2 CALCUL DE LA CAPACITE LINEIQUE DE LA LIGNE BIFILAIRE

On considère deux fils infinis parallèles portant chacun respectivement la charge $+q$ et $-q$ par unité de longueur. Ces fils sont déposés sur un substrat de saphir qui est un milieu diélectrique linéaire et isotrope (figure 3). Le demi-espace $z < 0$ est occupé par le saphir et le demi-espace $z > 0$ est occupé par le vide.

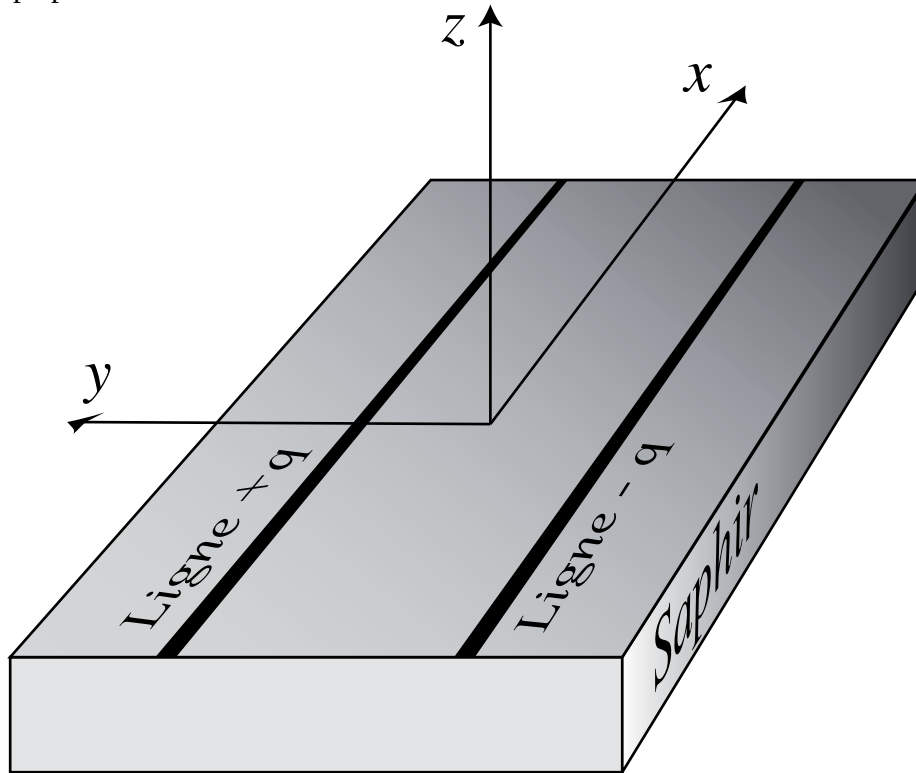


Figure 3 : portion de ligne bifilaire déposée sur un substrat de saphir

Pour les calculs d'électrostatique de cette partie, il suffira d'employer les théorèmes classiques (théorème de Gauss par exemple) en remplaçant la permittivité du vide ϵ_0 par $\epsilon_{eff} \cdot \epsilon_0$ une permittivité effective qui tient compte du fait qu'une partie de l'espace est occupée par le saphir.

A.2.1 Soit un fil infini portant la charge linéique $+q$. Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'espace en fonction de r (distance de M au fil). On justifiera proprement le calcul (symétries, invariances, théorème utilisé).

On appelle $2d$ la distance séparant les deux fils, ainsi le fil « positif » est situé en $y = +d$ et le fil « négatif » en $y = -d$.

A.2.2 En déduire le champ électrique créé en tout point P du plan $z = 0$ (plan sur lequel se situent les deux fils).

Les fils ne sont pas infiniment minces : soit $2a$ leur épaisseur, négligeable devant la distance les séparant.

A.2.3 Calculer la circulation du champ électrique sur un chemin allant d'un point du bord de la ligne portant la charge linéique $+q$ (abscisse $d - a$) à un point du bord de la ligne portant la charge $-q$ (abscisse $-d + a$). En déduire la différence de potentiel qui règne entre ces deux fils.

A.2.4 En isolant une portion de ligne bifilaire de longueur $d\ell$, tout se passe comme si l'on était en présence d'un condensateur. Quelle est la charge portée par chaque armature ? En déduire la capacité de ce condensateur puis la capacité linéique Γ de la ligne bifilaire en fonction de ε_{eff} , d et a .

A.3 RESONANCES DE LA LIGNE BIFILAIRE ET IMPEDANCE EQUIVALENTE

A.3.1 On considère une onde électrique qui se propage dans le sens des x croissants, repérée par l'indice « + ». Les expressions complexes de la tension et du courant sont alors respectivement :

$$\underline{u}_+(x, t) = U_+ e^{j(\omega t - kx)} \text{ et } \underline{i}_+(x, t) = I_+ e^{j(\omega t - kx)} \text{ où } j^2 = -1$$

A.3.1.a En reprenant l'équation du **A.1.3**, quelle est la relation entre k et ω ?

A.3.1.b En utilisant les équations obtenues en **A.1.2**, calculer le rapport $Z_C = \underline{u}_+(x, t) / \underline{i}_+(x, t)$ en fonction de Λ et de Γ . Quelle est la signification physique de ce rapport ? Quel nom peut-on lui donner ?

A.3.2 On considère maintenant une onde électrique qui se propage dans le sens des x décroissants, repérée par l'indice « - ». En suivant la même démarche qu'en **A.3.1**, exprimer $\underline{i}_-(x, t)$ en fonction de $\underline{u}_-(x, t)$ et de Z_C .

A.3.3 La ligne bifilaire étant ouverte, les ondes vont se réfléchir en $x = 0$. On cherche alors des solutions pour l'onde électrique sous la forme suivante :

$$\underline{u}(x, t) = U_+ e^{j(\omega t - kx)} + U_- e^{j(\omega t + kx)} \text{ et } \underline{i}(x, t) = I_+ e^{j(\omega t - kx)} + I_- e^{j(\omega t + kx)}$$

En utilisant les résultats des questions **A.3.1** et **A.3.2** et le fait que la ligne bifilaire est ouverte en $x = 0$, établir une relation entre U_+ et U_- et calculer le rapport $\underline{Z}(x) = \underline{u}(x, t) / \underline{i}(x, t)$ en fonction de Z_C , k et x .

A.3.4 Tout se passe comme si le générateur qui alimente la ligne était branché sur une impédance, l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \underline{Z}(x = \ell)$ de la ligne bifilaire. Calculer $\underline{Z}_e$ en fonction de Z_C , k et ℓ .

A.3.5 On considère maintenant une bobine pure d'inductance L placée en parallèle sur un condensateur pur de capacité C .

A.3.5.a Calculer l'impédance équivalente de cette association parallèle. On la mettra sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_{eq} = -j \frac{Z_0}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Exprimer Z_0 et ω_0 en fonction de L et C . Comparer cette expression à l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e$ calculée à la question **A.3.4**.

A.3.5.b Tracer sur la copie l'allure du module $\left| \underline{Z}_{eq} \right|$ en fonction de la pulsation ω . Quel est le phénomène qui se produit pour $\omega = \omega_0$?

A.3.6 On remarque que la ligne bifilaire présente en fait plusieurs pulsations de résonance. En utilisant l'expression de l'impédance équivalente obtenue en **A.3.4**, montrer que les pulsations de résonance sont des multiples entiers d'une pulsation fondamentale que l'on exprimera en fonction de la longueur ℓ de la ligne et de $\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$. A quel système simple vous fait penser ce résultat ?

A.3.7 Application numérique : la première fréquence de résonance est de l'ordre de 320 MHz et la ligne bifilaire a une longueur de 20 cm, une fois déployée. En déduire la valeur de la vitesse de propagation des ondes sur la ligne bifilaire. Cette valeur vous semble-t-elle cohérente ?