

Problème : Rayonnement dipolaire électrique

1. Étude du dipôle oscillant

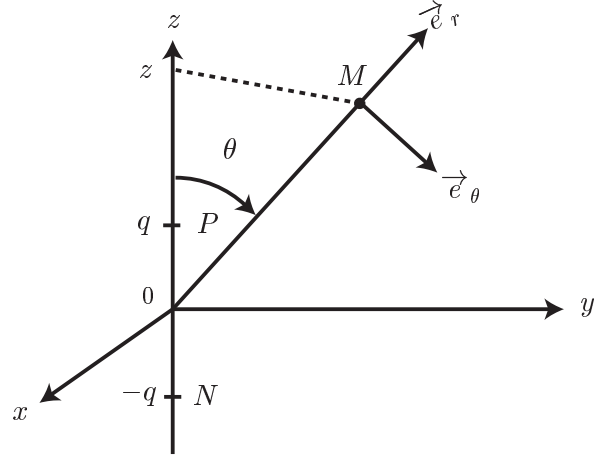
Considérons un dipôle formé d'une charge $-q$ fixe, située en N et d'une charge $+q$, située en P et animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω tel que :

$$NP = 2a \cos \omega t$$

ou en notation complexe :

$$\underline{NP} = 2a \exp j\omega t$$

Ce modèle permet de rendre compte, en première approximation, du comportement et de l'allure du champ électromagnétique rayonné par un atome ou une molécule excitée par un champ électrique harmonique, ou encore par une antenne. On se placera en coordonnées sphériques.



1.1. On suppose que la distance d'observation $r = |\overrightarrow{OM}|$ est grande devant a . Quelle est l'expression du moment dipolaire $\vec{p}$ de cette distribution de charge. On pose $p_0 = 2aq$.

1.2. Sachant que la charge $+q$ est animée d'un mouvement non relativiste, c'est à dire $v_{max}(q) \ll c$ (c célérité de la lumière dans le vide).

1.2.1. Quelle est l'inégalité satisfaite par la longueur d'onde de l'onde électromagnétique créée par le dipôle oscillant ?

1.2.2. Quel est l'intervalle des longueurs d'ondes du domaine visible ?

1.3. Le potentiel vecteur retardé crée, dans le vide, par le dipôle oscillant au point M , est donné par la relation (1) :

$$\underline{\vec{A}}(M, t) = \frac{j\omega\mu_0 p_0}{4\pi r} \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z \quad (5.3)$$

avec $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_r$.

Le potentiel scalaire $\underline{V}(M, t)$ créé par une telle distribution est donné, à l'ordre le plus bas en $\frac{a}{r}$, par la relation (2) :

$$\underline{V}(M, t) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + jkr) \quad (5.4)$$

avec $\underline{p} = p_0 \exp j(\omega t - kr)$.

1.3.1 Dédurre de la relation (2), l'expression du potentiel scalaire $V(M)$ créé par un dipôle électrostatique.

1.3.2. Le potentiel $\underline{V}(M, t)$ est écrit sous la forme d'une somme de deux termes ; donner pour chacun d'eux l'échelle spatiale associée à r .

1.4. Le calcul du champ magnétique créé par la distribution conduit à :

$$\vec{B}(M, t) = j\omega \frac{\mu_0 p \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + jkr) \vec{e}_\varphi$$

Que devient cette expression pour des champs lointains, c'est à dire pour $r \gg \lambda$?

1.5. Le calcul du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + jk.r) \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + jk.r - k^2 r^2) \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

1.5.1. En déduire le champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique.

1.5.2. Donner l'expression des composantes de $\vec{E}(M, t)$ pour des champs lointains.

1.5.3. À quelle condition sur l'angle θ peut-on écrire que $\|E_\theta\| \gg \|E_r\|$? On se placera toujours dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$.

2. Étude du rayonnement en champ lointain

Dans la suite du problème, on se situe dans l'approximation des champs lointains ou zone de rayonnement ($r \gg \lambda$). Dans toute cette partie l'étude sera faite **en notation réelle**.

2.1. Écrire les expressions de $\vec{E}(M, t)$, de $\vec{B}(M, t)$ et de k dans le cas d'un champ lointain. En déduire la structure locale en M de l'onde rayonnée par le dipôle oscillant.

2.2. Donner l'expression du vecteur de POYNTING $\vec{\pi}(M, t)$ de E , c , μ_0 et d'un vecteur unitaire de la base sphérique ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$).

2.3. Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle?

2.4. En optique géométrique, comment appelle-t-on les lignes de champ du vecteur de POYNTING?

2.5. Déterminer l'expression de l'intensité électromagnétique de l'onde $I = \langle |\vec{\pi}| \rangle$, c'est à dire la moyenne temporelle (sur une période) de la norme du vecteur de POYNTING, en fonction de ω , p_0 , ϵ_0 , c , r et θ . Quelle est l'unité de l'intensité I ?

2.6. Pour quelle valeur de θ , la fonction $I = \langle |\vec{\pi}| \rangle$ est-elle maximale? On note I_{max} l'expression obtenue. dans quelle direction l'intensité rayonnée est-elle nulle?

2.7. Déterminer le rapport $\frac{I}{I_{max}}$ et tracer le diagramme polaire $\frac{I(\theta)}{I_{max}}$ correspondant.

2.8. Montrer que la puissance électromagnétique moyenne rayonnée dans tout l'espace par le dipôle s'écrit sous la forme suivante :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \alpha \frac{p_0^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}$$

avec α coefficient à identifier.

2.9. Justifier rapidement pourquoi la puissance ne dépend pas de r .

2.10. Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, ce dernier oscille, sous l'effet d'un champ électrique $E = E_0 \cos \omega t$. Le moment dipolaire de la molécule décrite par ce modèle est donnée par la relation suivante :

$$p_0 = \frac{q^2 E_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

avec $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16}$ rad.s⁻¹.

- a. Tracer l'allure de p_0 en fonction de ω .
- b. Le comportement du modèle retenu vous paraît-il acceptable pour $\omega = \omega_0$? Préciser le phénomène physique qui n'est pas pris en compte.
- c. Proposer une simplification de l'expression de p_0 lorsque le champ électromagnétique qui excite la molécule appartient au domaine visible.
- d. Établir, dans ce cas, l'expression de la puissance moyenne rayonnée $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de q , E_0 , m , ω , ω_0 , ε_0 et c .
- e. Justifier alors pourquoi la couleur du ciel en plein jour et par temps clair est bleue.
- f. En fin de journée, lorsque le soleil se couche, il nous apparaît rouge ; expliquer qualitativement ce phénomène.

3. Amortissement de l'intensité électromagnétique

Dans cette partie, l'espace est repéré par les coordonnées cartésiennes. On considère une onde électromagnétique harmonique plane se propageant dans le vide dans le sens des z croissants. Les expressions des champs sont données par la relation suivante :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

3.1. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em}(M, t)$. En déduire sa valeur moyenne temporelle.

3.2. Exprimer la norme du vecteur de POYNTING $|\vec{\pi}|$ en fonction de la densité volumique magnétique $u(M, t)$ et de la célérité de la lumière c .

3.3. Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle ?

3.4. Quelles sont les puissances instantanée et moyenne (temporelle) qui traverse une surface S perpendiculaire à l'axe Oz ?

3.5. En déduire l'expression de l'intensité électromagnétique I de l'onde (puissance moyenne par unité de surface transportée par cette onde électromagnétique).

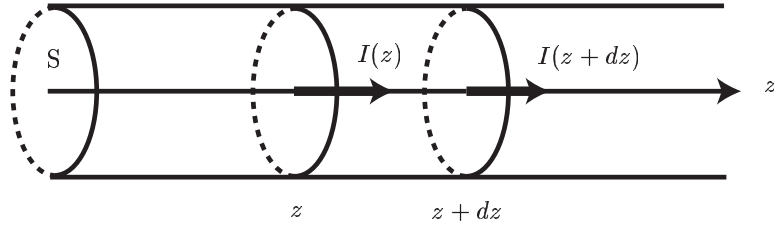
3.6. En admettant que l'énergie électromagnétique se conserve, établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont u et $\vec{\pi}$. Montrer que :

$$\text{div} \langle \vec{\pi} \rangle = 0$$

3.7. Considérons maintenant un cylindre de volume $d\tau$ de l'atmosphère, de section S , de longueur dz et de densité particulaire N_v (nombre de particules par unité de volume).

L'onde électromagnétique précédente se propage dans ce milieu selon Oz à la célérité c . L'intensité électromagnétique de l'onde à la cote z est notée $I(z)$. L'énergie électromagnétique est diffusée par les molécules contenues dans le volume $d\tau$. La puissance volumique électromagnétique diffusée sera notée p_d . On admettra que l'énergie électromagnétique est soit transmise, soit diffusée par les molécules contenues dans le volume $d\tau$.

a. Effectuer un bilan énergétique sur le volume $d\tau$. En déduire une relation entre P_d et $I(z)$ ou l'une de ses dérivées partielles.



b. La puissance volumique électromagnétique diffusée est donnée par la relation suivante :

$$P_d(z) = \frac{I(z)}{h(\omega)}$$

avec :

$$h(\omega) = 6\pi\varepsilon_0^2 m^2 c^4 \frac{\omega_0^4}{N_v q^4 \omega^4}$$

Données numériques : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

En déduire une équation aux dérivées partielles satisfaite par $I(z)$.

c. Intégrer cette équation. On notera $I(0) = I_0$.

d. Préciser l'unité de $h(\omega)$ et sa signification physique.

e. En considérant que l'atmosphère se comporte comme un gaz parfait à la température $T_0 = 290 \text{ K}$, sous la pression $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, calculer la densité particulaire N_v de l'atmosphère.

Données : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ et $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

f. Évaluer l'épaisseur z_B telle que l'intensité lumineuse correspondant à la couleur bleue soit divisée par deux. En déduire l'épaisseur comparable z_R pour la couleur rouge. Analyser les résultats obtenus.