

Aurélien 15/01/07

Agrégation interne 2006 : diffusion Rayleigh

(diffusion de la lumière solaire par l'atmosphère)

En poursuivant votre navigation sur ce site, vous acceptez l'utilisation de Cookies vous proposant des publicités adaptées à vos centres d'intérêts.



Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Soit un milieu constitué d'atomes d'hydrogène. Le nombre d'atomes par unité de volume est N . Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement se propage dans la direction Ox . Le champ électrique est $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{e}_z$. L'électron de l'atome oscille suivant la direction $\mathbf{e}_z$.

Equation différentielle décrivant le déplacement z de l'électron appartenant à un atome situé dans le plan d'abscisse x :

Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, la force entre le noyau de l'atome et le barycentre des charges négatives est proportionnelle à la distance les séparant : $-k \mathbf{r}$.

L'électron, placé dans des champs électrique et magnétique est de plus soumis à la force de Lorentz $-e \mathbf{E} - e(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$

Le poids de l'électron est négligeable devant les autres forces.

La seconde loi de Newton s'écrit : $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \mathbf{r} - e \mathbf{E} - e(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$

soit suivant l'axe $\mathbf{e}_z$: $m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k z - e E$

$$z'' + k/m z = -e/m E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$z'' + \omega_0^2 z = -e/m E_0 \cos(\omega t - kx) \text{ avec } \omega_0^2 = k/m$$

On néglige le régime transitoire.

Expression $z(t, x)$ du régime forcé à la pulsation ω :

$$z(t, x) = A \cos(\omega t - kx) ; z' = -A\omega \sin(\omega t - kx) ; z'' = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx)$$

repport dans l'équation différentielle :

$$-A\omega^2 \cos(\omega t - kx) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - kx) = -e/m E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = -e/m E_0 ; A = e/m E_0 / (\omega_0^2 - \omega^2) ;$$

$$z(t,x) = e/m E_0 / (\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t - kx).$$

Expression du dipole induit $\mathbf{p}(t) = -e z \mathbf{e}_z$

$$p_z = e^2/m E_0 / (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - kx) ; \text{amplitude } p_0 = e^2/m E_0 / (\omega_0^2 - \omega^2)$$

Expression de l'énergie moyenne rayonnée P_R par unité de temps par le dipole $\mathbf{p}$:

L'énergie moyenne rayonnée par unité de temps à travers la sphère de rayon r , c'est à dire le flux de $\mathbf{P}$ à travers la surface de la sphère de rayon r vaut :

$$\iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\omega^4 \sin^2 \theta p_0^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \frac{\omega^4 p_0^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\omega^4 p_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}$$

$$P_R = \omega^4 e^4 E_0^2 / [12 \pi \epsilon_0 c^3 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2]$$

La puissance moyenne de l'onde traversant sous incidence normale une surface d'aire S est $P_i = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 S$.

Expression de P_R en fonction de P_i :

$$P_R = \omega^4 e^4 P_i / [6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m^2 S (\omega_0^2 - \omega^2)^2]$$

En fait la puissance rayonnée qui correspond à une diffusion provient de la diminution de P_i et donc de E_0 lorsque l'onde se propage dans le milieu. On peut admettre que P_i (et donc E_0) dépend de x mais varie lentement selon x .

Réalisons un bilan énergétique dans un cylindre de section S entre x et $x+dx$:

Dans le volume Sdx , $NSdx$ atomes diffusent de l'énergie soit $NSP_R = -dP_i/dx$

$$\text{ou bien } P_i(x) - P_i(x+dx) = NSP_R dx$$

$$\text{or } P_R = \omega^4 e^4 P_i / [6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m^2 S (\omega_0^2 - \omega^2)^2]$$

$$dP_i/dx = -NS \omega^4 e^4 / [6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m^2 S (\omega_0^2 - \omega^2)^2] P_i = -P_i/l$$

$$l = 6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 / (N \omega^4 e^4), \text{ exprimée en mètre.}$$

Dans le cas de la diffusion de Rayleigh $(\omega_0^2 - \omega^2)$ est proche de ω_0^2

$$\text{alors } l \text{ s'écrit : } l = 6 \pi \epsilon_0^2 c^4 m^2 \omega_0^4 / (N \omega^4 e^4)$$

Calcul de l pour une radiation rouge (800 nm) en prenant ω_0 correspondant à $\lambda_0 = 121,8$ nm et $N = 10^{25}$ électrons par m^3 :

$$l = 6 * 3,14 / (4 \pi 10^{-7})^2 (9,1 10^{-31})^2 / [10^{25} * (1,6 10^{-19})^4] \omega_0^4 / \omega^4 = 1509 \omega_0^4 / \omega^4$$

or $\omega = 2\pi c/\lambda$ soit $\omega_0^4 / \omega^4 = (\lambda / \lambda_0)^4$.

$$I = 1509 (\lambda / \lambda_0)^4$$

$$I_R = 1509 (800/121,8)^4 = 2,8 \cdot 10^6 \text{ m} = \underline{2800 \text{ km}}.$$

Même calcul pour une radiation bleue (400 nm)

$$I_B = 1509 (400/121,8)^4 = 2,8 \cdot 10^6 \text{ m} = \underline{175 \text{ km}}.$$

Interprétation du bleu du ciel :

$$P_R (\text{bleu}) / P_R (\text{rouge}) = (\omega_B / \omega_R)^4 = (\lambda_R / \lambda_B)^4 = 16$$

La lumière diffusée par l'atmosphère est 16 fois plus riche en radiations bleues qu'en radiations rouges.

Un mélange de violet, de bleu, de vert et une toute petite fraction des autres couleurs, diffusés donne la couleur bleue.

Interprétation de la couleur rouge du soleil au couchant :

Le soir le soleil est très bas sur l'horizon : la lumière traverse une couche atmosphérique plus grande que lorsqu'il est au zénith : le bleu est de plus en plus diffusé ; le rouge, l'orange et le jaune peuvent nous atteindre ou se réfléchir sur les nuages.

[retour](#) - [menu](#)