

Correction : Antennes linéaires demi-onde

1.1.

$$d\vec{E}_p(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''(t - \frac{PM}{c})}{PM} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

or $PM = OM - z \cos\theta = r - z \cos\theta$ et $z \ll r$, alors un développement limité à l'ordre 0 donne :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}$$

Par contre, on a pas le droit a priori de faire un développement à l'ordre 0 de la fonction :

$$dp''\left(t - \frac{PM}{c}\right) = dp''\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos\theta}{c}\right)$$

d'où :

$$d\vec{E}_p(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos\theta}{c}\right)}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

1.2. On décompose l'antenne en éléments de longueur dz **fixes** aux bornes duquel il y a, à l'instant t , une charge q et $-q$, ce qui implique que le moment dipolaire élémentaire est :

$$\vec{dp}(t) = qdz \vec{e}_z \implies dp(t) = qdz$$

donc :

$$\frac{d[dp(t)]}{dt} = \frac{dq}{dt} dz = I(z, t) dz \quad \text{et} \quad dp''(t) = \frac{d^2[dp(t)]}{dt^2} = \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} dz$$

d'où :

$$\begin{aligned} dp''\left(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos\theta}{c}\right) &= \frac{\partial I\left(z, t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos\theta}{c}\right)}{\partial t} dz \\ &= I_0 f(z) \frac{d \cos[\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos\theta}{c})]}{dt} \\ &= -I_0 \omega f(z) \sin(\omega t - kr + kz \cos\theta) \\ &= -I_0 \omega f(z) [\sin(\omega t - kr) \cos(kz \cos\theta) + \cos(\omega t - kr) \sin(kz \cos\theta)] \end{aligned}$$

d'où l'expression de $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E}_p \\ &= \frac{-I_0 \omega \sin\theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-L}^{+L} f(z) \cos(kz \cos\theta) dz - \frac{I_0 \omega \sin\theta \cos(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-L}^{+L} f(z) \sin(kz \cos\theta) dz \end{aligned}$$

or $f(z)$ est une fonction paire et $\sin(kz \cos\theta)$ est une fonction impaire, donc $f(z) \sin(kz \cos\theta)$ est une fonction impaire, d'où :

$$\int_{-L}^{+L} f(z) \sin(kz \cos\theta) dz = 0$$

donc :

$$\vec{E} = -\frac{I_0 \omega \sin\theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-L}^{+L} f(z) \cos(kz \cos\theta) dz$$

$f(z) \cos(kz \cos\theta)$ est une fonction paire, donc :

$$\int_{-L}^{+L} f(z) \cos(kz \cos\theta) dz = 2 \int_0^{+L} f(z) \cos(kz \cos\theta) dz$$

d'où :

$$\vec{E} = -\frac{2I_0 \omega \sin\theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_0^{+L} f(z) \cos(kz \cos\theta) dz$$

2.

2.1. On a

$$L \ll \lambda \implies kz \cos \theta = \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \ll 1$$

ce qui permet de faire un développement limité à l'ordre 0, de la fonction suivante :

$$\cos(kz \cos \theta) \simeq 1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{2I_0\omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_0^{+L} \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right) dz \\ &= -\frac{I_0\omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{4L}{\pi} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

le vecteur de POYNTING moyen est :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle$$

or dans la zone de rayonnement, l'onde est localement plane, donc :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

d'où :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle E^2 \rangle \vec{e}_r = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{I_0^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \frac{16L^2}{\pi^2} \vec{e}_r$$

La puissance moyenne rayonnée dans l'espace c'est à dire à travers une sphère de rayon r , est donc :

$$\mathcal{P}_{moy} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{I_0^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \frac{16L^2}{\pi^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

or :

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{moy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{8L^2 \omega^2}{3\pi^3 \epsilon_0 c^3} \right) I_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2 \end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{R} = \frac{8L^2 \omega^2}{3\pi^3 \epsilon_0 c^3} = \frac{32}{3\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2$$

2.2. Si $L = \frac{\lambda}{4}$, $\cos(kz \cos \theta) = \cos\left(\pi \frac{z}{2L} \cos \theta\right)$, d'où :

$$\vec{E} = -\frac{2I_0\omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_0^{+L} \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right) \cos\left(\pi \frac{z}{2L} \cos \theta\right) dz$$

or :

$$\cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right) \cos\left(\pi \frac{z}{2L} \cos \theta\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\pi \frac{z}{2L} (1 + \cos \theta)\right) + \cos\left(\pi \frac{z}{2L} (1 - \cos \theta)\right) \right]$$

d'où, tout calcul fait :

$$\vec{E} = -\frac{I_0\omega \sin \theta \sin(\omega t - kr)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{4L \cdot 0,95}{\pi} \vec{e}_\theta$$

De même que la question **2.1.**, on trouve :

$$\mathcal{R} = \frac{32}{3\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{0,95L}{\lambda} \right)^2$$

or $\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{4}$, donc :

$$\mathcal{R} = 72\Omega$$

2.3. AN : Si $L = \frac{\lambda}{40}$:

$$\mathcal{R} = 0,8\Omega$$

Si $L = \frac{\lambda}{4}$:

$$\mathcal{R} = 72\Omega$$

Conclusion : les "petites" antennes ($L \ll \lambda$) rayonnent mal par rapport aux antennes ayant des longueurs de l'ordre de la longueur d'onde émise λ .

3. D'après la question **2.2.** et en tenant compte des positions des centres des deux antennes, le champ électrique résultant en un point M à l'instant t , est :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{tot} &= -\frac{I_0\omega \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{4L.0,95}{\pi} \left[\sin \left(\omega t - kr + \frac{dk}{2} \cos \theta \right) + \sin \left(\omega t - kr - \frac{dk}{2} \cos \theta \right) \right] \vec{e}_\theta \\ &= -\frac{2I_0\omega \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{4L.0,95}{\pi} \sin(\omega t - kr) \cos \left(\frac{d\pi}{\lambda} \cos \theta \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

or :

$$d = 4\lambda$$

$$\vec{E}_{tot} = -\frac{2I_0\omega \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{4L.0,95}{\pi} \sin(\omega t - kr) \cos(4\pi \cos \theta) \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$I = \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \langle E_{tot}^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{2I_0^2 \omega^2}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \frac{(4L.0,95)^2}{\pi^2} \sin^2 \theta \cos^2(4\pi \cos \theta)$$

d'où l'intensité est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$I_{max} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{2I_0^2 \omega^2}{(4\pi\epsilon_0 c^2 r)^2} \frac{(4L.0,95)^2}{\pi^2}$$

donc :

$$\frac{I}{I_{max}} = \sin^2 \theta \cos^2(4\pi \cos \theta)$$