

Problème : Antennes linéaires demi-onde

Un dipôle élémentaire de moment dipolaire variable $d\vec{p}(t)$ placé en O selon Oz rayonne à grande distance en un point M ($OM=r$), un champ électrique :

$$d\vec{E}_O(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''(t - \frac{r}{c})}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

On se propose d'étudier l'association de dipôles élémentaires pour constituer des antennes, utilisées dans les télécommunications. Un élément de circuit porté par Oz , de résistance ohmique négligeable, est parcouru par un courant sinusoïdal :

$$I(z, t) = I_0 f(z) \cos \omega t$$

I_0 est un courant constant et $f(z)$ caractérise la distribution spatiale du courant dans l'antenne assimilable à un segment $[-L, L]$ de petite dimension vis à vis de r (on se place toujours dans l'hypothèse des champs lointains).

1.1. Donner l'expression du champ $d\vec{E}_p(M, t)$ créé par un dipôle élémentaire placé en P ($OP = z \in [-L, L]$).

1.2. En déduire l'expression intégrale donnant le champ $\vec{E}$ créé par la distribution totale de courant et montrer que si $f(z) = f(-z)$, alors $\vec{E}$ varie en $\sin(\omega t - kr)$, où $k = \frac{\omega}{c}$.

2. Le courant est stationnaire de mode fondamental tel que :

$$f(z) = \cos\left(\pi \frac{z}{2L}\right)$$

2.1. Calculer explicitement $\vec{E}$ si $L \ll \lambda$, et montrer que la puissance moyenne rayonnée par le circuit s'écrit sous la forme :

$$P_{moy} = \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2$$

On donnera l'expression de la résistance de rayonnement $\mathcal{R}$, en introduisant $\frac{L}{\lambda}$.

2.2. Considérons à présent une antenne demi-onde de longueur $2L = \frac{\lambda}{2}$. Répondre aux mêmes questions que précédemment. On admet dans le calcul que $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \simeq 0,95 \sin^2\theta$.

2.3. AN : Comparer les deux résistances lorsque dans le premier cas $L = \frac{\lambda}{40}$. Conclusion.

Dans le cas où $L = \frac{\lambda}{4}$, calculer numériquement P_{moy} pour $I_0 = 10$ A. Puis donner l'amplitude maximale du champ E à une distance de 30 km d'une antenne parcourue par un courant de fréquence 100 MHz.

3. Deux antennes identiques sont disposées selon Oz et leurs centres sont situés en $(0, 0, \pm \frac{d}{2})$. Elles sont alimentées par des courants égaux.

Montrer, en utilisant les calculs précédents, que si les courants sont en phase et $d = 4\lambda$, alors :

$$\frac{I}{I_{max}} = \sin^2\theta \cos^2(4\pi \cos\theta)$$

I étant l'intensité de l'onde résultante au point M .