

Réponses1) Dans le vide : $\omega^2 = k^2 c^2$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

2)

$$\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - k z) \vec{u}_x$$

D'après Maxwell-Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - j \omega \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} = -jk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-jk E \vec{u}_y = -j \omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E \vec{u}_y$$

(on vient de retrouver pour une OPPM

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \\ &= \frac{k \vec{u}_z \wedge E \vec{u}_x}{\omega} \\ &= \frac{k E}{\omega} \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} E \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - k z) \vec{u}_y$$

3)

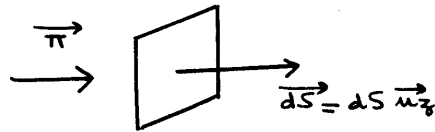
$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$= E_0 \cos(\omega t - k z) \vec{u}_x \wedge \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t - k z) \vec{u}_y$$

$$\vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k z) \vec{u}_z$$

$$\text{ou } \vec{\pi} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - k z) \vec{u}_z$$

4)



$$\begin{aligned} dP &= \vec{\pi} \cdot d\vec{S} \\ &= \pi \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z \\ &= \pi dS \end{aligned}$$

$$I = \frac{\langle dP \rangle}{dS}$$

$$I = \langle \pi \rangle$$

$$I = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \quad (\text{indépendant de } z)$$

5)

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= q \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{F}_E &= q \vec{E} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\|\vec{F}_B\|}{\|\vec{F}_E\|} \leq \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$$

$$\text{avec cf 3) } \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

$$\frac{\|\vec{F}_B\|}{\|\vec{F}_E\|} \leq \frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1 \quad \text{car dans l'approximation non relativiste } \|\vec{v}\| < c$$

On peut donc négliger la force magnétique par rapport à la force électrique.

6)

$$k z_f = 2\pi \frac{z_f}{\lambda_0}$$

Le z_f de l'électron est inférieur au rayon de l'atome: a

$$k z_f < 2\pi \frac{a}{\lambda_0}$$

or

$$\frac{a}{\lambda_0} \ll 1$$

On pourra donc négliger le déphasage du champ par rapport au centre 0 de l'atome dans la mesure où la longueur

d'onde est très supérieure au rayon de l'atome.

7) Principe fondamental appliqué à l'électron :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{élastique}} + \vec{F}_{\text{dissipative}} + \vec{F}_{\text{champ onde}} &= m \vec{a} \\ -m\omega_0^2 \vec{OM} - m\Gamma \frac{d\vec{OM}}{dt} - e \vec{E} &= m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \\ /x \quad -m\omega_0^2 x - m\Gamma \dot{x} - e E_0 \cos \omega t &= m \ddot{x} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t)$$

on cherche la solution en régime forcé sinusoïdal :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x &= -\frac{e}{m} E_0 \exp(j\omega t) \\ (j\omega)^2 x + \Gamma j\omega x + \omega_0^2 x &= -\frac{e}{m} E_0 \exp(j\omega t) \end{aligned}$$

$$x = \frac{\frac{e}{m} E_0}{(\omega^2 - \omega_0^2) - j\omega\Gamma} \exp(j\omega t)$$

$$\begin{aligned} 8) \quad v &= \frac{dx}{dt} \\ &= j\omega x \end{aligned}$$

$$v = \frac{j\omega \frac{e}{m} E_0}{(\omega^2 - \omega_0^2) - j\omega\Gamma} \exp(j\omega t)$$

remarque

En général, on cherche alors à récupérer le module et l'argument.

(le module est le produit des modules
l'argument est la somme des arguments
pour un produit de facteurs)

Si on est "adepte" de l'arctang - compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ - il faut des complexes ayant une partie réelle positive.

d'où la réécriture - à cause de $(\omega^2 - \omega_0^2) -$

$$\begin{aligned}
 \underline{v} &= \frac{j\omega \frac{e}{m} E_0}{j^2(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega\Gamma} \exp j\omega t \\
 &= \frac{-\omega \frac{e}{m} E_0}{\omega\Gamma + j(\omega^2 - \omega_0^2)} \exp j\omega t \\
 \underline{v} &= -\frac{\omega \frac{e}{m} E_0}{\sqrt{\omega^2\Gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \exp j(\omega t - \arctan \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\Gamma})
 \end{aligned}$$

Ici, on veut la partie réelle sous la forme $V_r \cos \omega t + V_i \sin \omega t$.
 le plus simple est donc de se lancer dans le calcul, lourd, qu'on ne fait généralement pas, en rendant le dénominateur réel.

$$\underline{v} = \frac{j\omega \frac{e}{m} E_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} [(\omega^2 - \omega_0^2) + j\omega\Gamma] \exp(j\omega t) \quad \rightarrow \cos \omega t + j \sin \omega t$$

D'où la partie réelle :

$$v = \underbrace{\frac{-\omega \frac{e}{m} E_0 (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}}_{V_i} \sin \omega t + \underbrace{\frac{-\omega^2 \frac{e}{m} E_0 \Gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}}_{V_r} \cos \omega t$$

$$V_r = \frac{-\frac{e}{m} E_0 \omega^2 \Gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

$$V_i = \frac{-\frac{e}{m} E_0 \omega (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

g)

$$\begin{aligned}
 P &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 &= (-e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\
 &= -e \vec{E} \cdot \vec{v}
 \end{aligned}$$

(la puissance de la force magnétique est nulle)

$$\begin{aligned}
 &= -e E_0 \cos(\omega t) (V_r \cos(\omega t) + V_i \sin(\omega t)) \\
 &= -e E_0 V_r \cos^2(\omega t) - e E_0 V_i \sin(\omega t) \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

La réponse (vitesse) à l'excitation comporte une partie en phase avec l'excitation (champ électrique) en $\cos(\omega t)$ et une partie en quadrature en $\sin(\omega t)$.

La puissance moyenne pour cette partie en quadrature sera nulle.

$$\langle P \rangle = -e E_0 V_r \langle \cos^2(\omega t) \rangle - e E_0 V_i \underbrace{\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle}_{\text{nul}}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = -e E_0 V_r \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^2 E_0^2}{2m} \frac{\omega^2 \Gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}$$

$$\text{avec } I_0 = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

$$= \frac{e^2}{m \epsilon_0 c} I_0 \frac{1/\Gamma}{\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \Gamma}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{e^2}{m \epsilon_0 c} I_0 \frac{1/\Gamma}{\left(\frac{\omega_0}{\Gamma}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + 1}$$

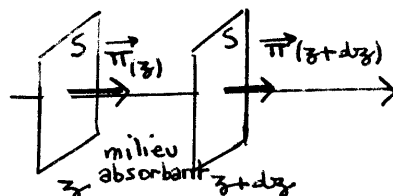
finallement:

$$\boxed{\langle P \rangle = \underbrace{\frac{e^2}{m \epsilon_0 c \Gamma}}_{\mathcal{E}(\omega)} \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} I_0}$$

avec

$$\boxed{A = \frac{e^2}{m \epsilon_0 c \Gamma}}$$

10)



Pour le volume élémentaire $S dz$
Pendant la durée élémentaire dt

variation d'énergie électromagnétique du système	=	énergie électromagnétique reçue par transfert (flux)	+	énergie électromag. produite par des sources
↓		↓		↓
$d^2 U_{EM}$	=	$S^2 U_{EM}$ reçue	+	$S^2 U_{EM}$ produite
Ce terme est nul puisque <u>en régime permanent</u> , l'énergie du système ne change pas.		On tient compte du <u>flux entrant</u> en x et du <u>flux sortant</u> en $x+dx$		Pas de source positive ici mais <u>source négative</u> correspondant à l'énergie puisée à l'onde par les atomes

(on travaille en valeurs moyennes pour π)

$$0 = \langle \pi(z) \rangle S dt - \langle \pi(z+dz) \rangle S dt - \underbrace{\langle P \rangle N dz dt}_{\substack{\text{nbre} \\ \text{d'atomes} \\ \text{dans } dz = \\ S dz}}$$

$$0 = \underbrace{(I(z) - I(z+dz)) S dt}_{- \frac{dI(z)}{dz} dz} - \epsilon(\omega) I(z) N S dz dt$$

On obtient :

$\frac{dI}{dz} = - N \epsilon(\omega) I(z)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha(\omega)}$

11)

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\alpha I(z)$$

$$\int_{I(z=0)}^{I(z)} \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^z dz'$$

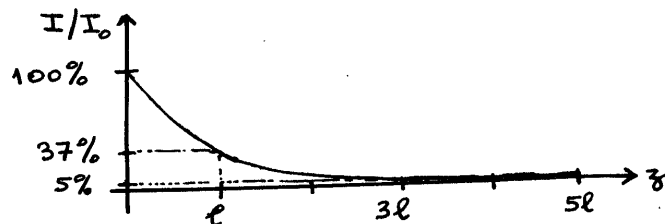
$$\ln \frac{I(z)}{I(z=0)} = -\alpha z$$

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z)$$

12) avec $\alpha = \frac{1}{\ell(\omega)}$:

$$I(z) = I_0 \exp\left(-\frac{z}{\ell}\right)$$

ℓ est la longueur caractéristique pour la décroissance de I due à l'absorption de l'onde pour les molécules



pour un parcours ℓ , I a diminué de 63%
 3 ℓ _____ 95%
 5 ℓ _____ de plus de 99%

13) Dans $\alpha(\omega)$, seul le dénominateur : $1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$ dépend de ω .
 $\alpha(\omega)$ est maximal si le dénominateur est minimal, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$ (le dénominateur est alors égal à 1).

$$\alpha = \alpha_{\max} \text{ pour } \omega = \omega_0$$

$$\alpha_{\max} = \alpha(\omega_0)$$

$$= N A$$

$$\alpha_{\max} = \frac{N e^2}{m \epsilon_0 c \Gamma}$$

14) Application numérique :

- $P = 10^{-3} \text{ bar}$
 $= 10^2 \text{ Pa}$

$$T = 298 \text{ K}$$

$$P V = n R T$$

$$P = \frac{n}{V} R T$$

on cherche $N = \frac{n}{V} \times N_A$

$$N = \frac{P}{R T} N_A$$

$$= \frac{10^2}{8,31 \times 298} 6,02 \cdot 10^{23}$$

$$N = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

$$\alpha_{\max} = \frac{N e^2}{m \epsilon_0 c \Gamma}$$

$$= \frac{2,4 \cdot 10^{22} (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8,84 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,5 \cdot 10^7}$$

$$\alpha_{\max} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

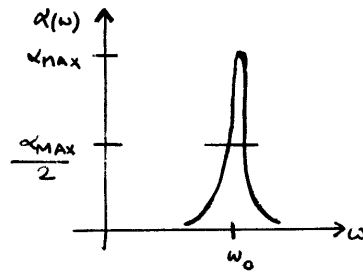
(remarque: pour $\alpha_{\max}$, on a

$$l = 0,06 \text{ nm}$$

$$5l = 0,29 \text{ nm}$$

L'absorption est totale (à moins de 1% près) au bout de 0,3 nm c'est à dire 2 à 3 rayons d'atome)

15)



Il s'agit d'une courbe de résonance.
 L'absorption est maximale à la fréquence de résonance.
 (On verra que cette résonance est très aigüe. Si la fréquence d'excitation des atomes n'est pas bonne, il n'y aura pas d'absorption)

16)

remarque:

On détermine la bande passante à -3 dB
 → pour une énergie ou une puissance
 (ex: $P = u i$ en électricité) on cherche à résoudre: grandeur = grandeur maximale / 2
 → sinon (ex: tension u en électricité, intensité i en électricité) on cherche à résoudre: grandeur = grandeur maximale / $\sqrt{2}$

On cherche les ω tels que:

$$\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \pm \frac{\Gamma}{\omega_0}$$

• pulsation de coupe basse ω_B

$$\frac{\omega_0}{\omega_B} - \frac{\omega_B}{\omega_0} = \frac{\Gamma}{\omega_0}$$

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_0} \right)^2 + \frac{\Gamma}{\omega_0} \left(\frac{\omega_B}{\omega_0} \right) - 1 = 0$$

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_0} \right) = -\frac{\Gamma}{2\omega_0} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2\omega_0} \right)^2 + 1}$$

$$\omega_B = -\frac{\Gamma}{2} + \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma}{2\omega_0} \right)^2}$$

- pulsation de coupure haute ω_H

$$\frac{\omega_0}{\omega_H} - \frac{\omega_H}{\omega_0} = -\frac{\Gamma}{\omega_0}$$

$$\omega_H = \frac{\Gamma}{2} + \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma}{2\omega_0}\right)^2}$$

- largeur de la bande passante

$$\delta\omega = \omega_H - \omega_B$$

$$\delta\omega = \Gamma$$

17)

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}$$

donc :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

A.N.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_m}$$

$$Q = \frac{2\pi c}{\lambda_m \Gamma}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{0,85 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^7}$$

$$Q = 0,15 \cdot 10^9$$

- 18) En T.P. en mécanique $Q_{\max} \simeq 10$
 en électricité $Q_{\max} \simeq 100$

Ici $Q \simeq 10^9$ donc la raie d'absorption dans le spectre est très fine. la résonance est très aigue.