

correction : propagation d'ondes électromagnétiques dans un métal

1. Temps de relaxation

1.1.

$$n = \frac{\mu}{M} N_A \simeq 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

1.2. Comme les cations sont supposés fixes :

$$\vec{j} = -ne \vec{v}$$

1.3. L'approximation linéaire consiste à négliger les termes non linéaires devant les termes linéaires.

Exemples

- négliger la force magnétique $-e \vec{v} \wedge \vec{B}$ devant la force électrique $-e \vec{E}$.
- et négliger l'accélération convective $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ devant l'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ puisque, pour un fluide d'électrons, l'accélération d'un électron est :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{d\vec{v}(x, y, z, t)}{dt} \quad (4.1)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (4.2)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot v_z \quad (4.3)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} \quad (4.4)$$

1.4. La relation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -e \vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

D'où :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

On aura donc en régime permanent :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$$

donc la densité volumique de courant électrique est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}_0 = \gamma_0 \vec{E}_0$$

avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

$\Rightarrow$

$$\tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2} \simeq 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

2. Oscillations de la densité de charge dans un milieu conducteur

2.1. On a :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

Le vecteur densité de courant électrique est $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

D'où :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \quad (4.5)$$

2.2. L'équation traduisant la conservation de la charge électrique est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4.6)$$

L'équation (2), la divergence de l'équation (1) et $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donnent :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \quad (4.7)$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

2.3. Du fait que $\omega_p \simeq 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \gg \frac{1}{\tau} \simeq 4 \cdot 10^{13} \text{ s}$, l'équation caractéristique de (3) a pour solutions :

$$r_1 = -\frac{1}{2\tau} + j\omega_p$$

et

$$r_2 = -\frac{1}{2\tau} - j\omega_p$$

Donc :

$$\rho = A \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cos(\omega_p t + \varphi)$$

avec A et φ deux constantes.

τ est le temps caractéristique de la décroissance de la densité volumique de charge ρ : τ est appelé temps de relaxation. Donc le régime transitoire de retour à la neutralité électrique du métal, dure environ $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$. Ce qui nous permet d'écrire $\rho \simeq 0$ dans un métal.

2.4. En tendant τ vers ∞ dans l'équation (3) on aura :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_p^2 \rho = 0$$

La densité volumique de charge ρ oscille à la pulsation propre ω_p .

3. Conducteur en "basse fréquence" : Effet de peau

3.1. La longueur d'onde, dans le vide, des ondes centimétriques est $\lambda \approx 10^{-2} \text{ m}$, la fréquence est donc de l'ordre de $\nu = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-2}} = 30 \text{ GHz}$.

On a

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

En régime sinusoïdal établi :

$$\vec{v} = -\frac{\frac{e\tau}{m}}{1 + j\omega\tau} \vec{E}$$

D'où, la densité volumique de courant est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 + j\omega\tau} \vec{E} = \underline{\gamma} \vec{E}$$

avec $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$ et $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

Le temps de relaxation d'un métal est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14}$ s (voir question **1.2.**), or on est dans un domaine de fréquence de l'ordre de $\nu \approx 30$ GHz, ce qui implique $\omega\tau = 2\pi\nu\tau \ll 1$ (domaine qualifié de "basse fréquence"), donc :

$$\underline{\gamma} \simeq \gamma_0$$

D'autre part,

$$\frac{|\vec{j}_c|}{|\vec{j}_d|} \simeq \frac{|\underline{\gamma}E|}{|\varepsilon_0\omega E|} \simeq \frac{6.10^7}{\frac{1}{36\pi.10^9}2\pi.3.10^{10}} \simeq 3.6.10^7 \gg 1$$

On peut donc négliger le courant de déplacement devant celui de conduction.

Par la suite les équations de MAXWELL dans un métal où $\rho = 0$ (voir **2.3.**) deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.8)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\gamma_0 \vec{E} \quad (4.11)$$

3.2. Cherchons l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$?

En prenons le rotationnel de l'équation (5) et en utilisant l'équation (7), on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0\gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

or $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, d'où :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0\gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.12)$$

Injectons l'expression de $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ dans l'équation (8) :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega = \frac{(1-j)^2}{2}\mu_0\gamma_0\omega$$

En posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$, la relation de dispersion s'écrit :

$$\underline{k} = \frac{1-j}{\delta}$$

ou

$$\underline{k} = -\frac{1-j}{\delta}$$

L'amplitude de l'onde se propageant dans la direction des x croissants, ne peut que diminuer, d'où $\underline{k} = -\frac{1-j}{\delta}$ est à rejeter puisque cette relation donne un champ électrique dont l'amplitude croît dans le sens des x croissants. Par conséquent l'expression du champ électromagnétique, après avoir utilisé $\underline{k} = \frac{1-j}{\delta}$, est :

$$\underline{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}(x, t) &= \frac{\underline{k}}{\omega} \wedge \underline{E}(x, t) \\ &= (1-j)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0}{2\omega}} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \\ &= \frac{1-j}{\omega\delta} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \vec{u}_x \wedge \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp j\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

3.3. La puissance moyenne dissipée par effet JOULE et **par unité de volume** est :

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_e(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{\gamma_0}{2} |\vec{E}|^2$$

La puissance moyenne dissipée dans le volume considéré est :

$$d\mathcal{P}_{moy} = \frac{\gamma_0}{2} E_0^2 \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) S dx$$

3.4. La valeur moyenne du vecteur de POYNTING est :

$$\begin{aligned} \vec{\pi}_{moy} &= \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}_e(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}_e\left(\vec{E} \wedge \left[\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}^*\right]\right) \end{aligned}$$

Or $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

$$\vec{\pi}_{moy} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Le flux moyen d'énergie à travers la surface limitant le volume élémentaire considéré est :

$$\begin{aligned} [\pi_{moy}(x) - \pi_{moy}(x + dx)] S &= -\frac{\partial \pi_{moy}(x)}{\partial x} S dx \\ &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} \frac{2}{\delta} \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) S dx \end{aligned}$$

Or $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$.

D'où :

$$\begin{aligned} [\pi_{moy}(x) - \pi_{moy}(x + dx)] S &= \frac{\gamma_0}{2} E_0^2 \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right) S dx \\ &= d\mathcal{P}_{moy} \end{aligned}$$

(D'après **3.3.**)

On vérifie ainsi le bilan énergétique local :

$$\pi_{moy}(x) S = \pi_{moy}(x + dx) S + d\mathcal{P}_{moy}$$

puisque que la variation dans le temps de la densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne, est nulle (à vérifier).