

Problème : Propagation d'ondes électromagnétiques dans un métal

Pour décrire les propriétés électriques d'un métal, on adopte le modèle d'un fluide de charges libres : un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité n (nombre d'électrons libres par unité de volume), ces derniers assurant la conduction électrique. En plus des forces dues au champ électromagnétique, un électron, de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, est soumis aux forces d'interaction (chocs) avec les ions, modélisées par une force de type frottement fluide $-\frac{m\vec{v}}{\tau}$, $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse de l'électron par rapport au conducteur et τ une constante dépendant de la nature du matériau.

On se placera dans l'approximation linéaire.

1. Temps de relaxation

Le cuivre de masse molaire $M_{Cu} = 64$ g. mol⁻¹, a une masse volumique $\mu = 8,9 \cdot 10^3$ kg.m⁻³.

1.1 Calculer la densité particulaire n des électrons de conduction de ce métal sachant que chaque atome de cuivre libère un électron de conduction (le nombre d'AVOGADRO $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹).

1.2. Donner la relation entre le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un électron.

1.3. En quoi consiste l'approximation linéaire ?

1.4. La conductivité du cuivre, soumis à un champ électrique **permanent**, est $\gamma_0 = 6 \cdot 10^7$ S.m⁻¹.

Estimer la valeur du temps de relaxation τ du métal. On appliquera le principe fondamental de la dynamique à un électron.

2. Oscillations de la densité de charge dans un milieu conducteur

2.1. Établir, en régime variable, l'équation différentielle liant le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

2.2. En déduire l'équation régissant l'évolution de la densité volumique de charge électrique ρ au sein du milieu. On posera : $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$, ω_p est dite pulsation plasma.

2.3. Donner l'expression de ρ , en déduire la signification physique de τ et montrer que l'on peut prendre $\rho \simeq 0$ dans le métal.

2.4. Montrer que, si on néglige les forces d'amortissement, il peut exister dans le gaz d'électrons un mode propre d'oscillations de charges, de pulsation ω_p .

3. Conducteur en "basse fréquence" : Effet de peau

On étudie la propagation dans le cuivre d'une onde électromagnétique plane et monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, dont le champ électrique est noté :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right]$$

avec $\vec{E}_0$ réel.

Le domaine spectral envisagé correspond à des ondes centimétriques.

3.1. Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence des ondes étudiées ? Que peut-on penser de la conductivité γ , a priori complexe, du métal dans ce domaine de fréquences ? Comparer les amplitudes des vecteurs densités de courant électrique de conduction $\vec{j}_c$ et de densité de courant de déplacement $\vec{j}_d$. Écrire la forme approchée des équations de MAXWELL dans le milieu métallique dans le cadre de notre étude.

3.2. En déduire l'équation de propagation du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Quelle est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le métal ? Donner l'expression du champ électromagnétique de l'onde, qui se propage dans la direction des x croissants, dans le métal qui occupe la zone $x > 0$.

3.3. Déterminer la puissance moyenne cédée par l'onde au métal dans un volume cylindrique élémentaire, de section S perpendiculaire à Ox , dont les faces planes sont situées aux abscisses x et $x + dx$.

3.4. Comparer cette puissance au flux du vecteur de POYNTING moyen à travers la surface délimitant ce volume et vérifier le bilan énergétique local attendu.