

Correction : Ondes électromagnétiques dans un plasma

1. Préambule

1.1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.13)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.15)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.16)$$

On en déduit les équations de propagation du champ $\vec{E}$ et du champ $\vec{B}$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.17)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

1.2. Il s'agit d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω et se propageant dans le sens des x croissants. Sa polarisation est rectiligne de direction $\vec{u}_y$.

1.3. En introduisant l'expression de $\vec{E}$ dans l'équation de propagation du champ électrique obtenue ci-dessus, on obtient la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Le vide n'est pas un milieu dispersif car la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ est indépendante de ω .

1.4. L'équation de MAXWELL-FARADAY donne :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

Donc :

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

1.5. non, car une onde plane est illimitée dans le temps et l'espace.

2. Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

2.1.

2.1.1. $n_0 \approx 10^{10} \text{ m}^{-3} \ll n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$, on peut donc négliger la force de type frottement visqueux $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$

2.1.2. Bilan des forces :

- Force de type frottement visqueux.
- Force de LORENTZ : $-e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$.

Les forces à négligées sont :

★ la force de type frottement visqueux car le plasma est diluée.

★ la force magnétique devant la force électrique (voir le cadre de travail où on s'est placé dans l'exercice 1 : approximation linéaire).

2.1.3. L'accélération d'un électron s'écrit :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Le premier terme est l'accélération local.

Le deuxième terme est l'accélération convective.

Cherchant le vecteur vitesse sous forme d'une onde plane ayant la même caractéristique que le champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{v} = \underline{v}_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Ceci ressemble au régime forcé en électrocinétique.

D'où :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}) = 0$$

car $v_x = v_z = 0$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 0$.

Donc :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

2.2. Mouvement des électrons libres et conductivité

2.2.1. On a :

$$m \vec{a}(M, t) \simeq m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} = -e E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

$\Rightarrow$

$$\vec{v} = -\frac{e E_0}{j m \omega} \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

2.2.2. Le vecteur densité de courant :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= q_{ions} n_{ions} \vec{v}_{ions} + q_{electrons} n_{electrons} \vec{v}_{electrons} \\ &= \frac{n_0 e^2}{j \omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{M} \ll \frac{1}{m}$, d'où :

$$\vec{j} \simeq \frac{n_0 e^2}{j m \omega} E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Comme $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ alors :

$$\underline{\sigma} \simeq \frac{n_0 e^2}{j m \omega}$$

On a montré que (exercice 1) la conductivité d'un métal à basse fréquence est :

$$\gamma_0 = \sigma_{mtal} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$$

Donc γ_0 est réel, ce qui implique que $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en phase. Cependant, la conductivité dans l'ionosphère $\underline{\sigma} \simeq \frac{n_0 e^2}{j m \omega}$ est imaginaire pur : $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature de phase.

2.2.3.

$$\mathcal{P}_{moy} = \frac{1}{2} \mathcal{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = 0$$

Ce résultat est cohérent avec 2.1.1. car on a négligé les interactions entre les charges.

2.3 Propagation du champ électromagnétique

2.3.1. Les équations de MAXWELL dans l'ionosphère sont :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.19)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.21)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.22)$$

$\vec{\nabla} \wedge (21), (20)$ et (23) donnent l'équation de propagation du champ électrique :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En remplaçant dans l'équation de propagation, Δ par $-\underline{k}^2$, $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j\omega$ et $\underline{\sigma}$ par $\frac{n_0 e^2}{j m \omega}$ on trouve la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}} \simeq 5,6.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ pour l'ionosphère.

2.3.2. Étude du cas $\omega < \omega_p$:

a-

$$\underline{k} = -\frac{j}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = -\frac{j}{\delta}$$

ou

$$\underline{k} = \frac{j}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \frac{j}{\delta}$$

avec : $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$.

b- Pour avoir une amplitude qui diminue dans le sens des x croissants, on ne retiendra que la première expression de $\underline{k}$. On trouve alors :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \vec{u}_y$$

et d'après l'équation de MAXWELL-FARADAY, on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \quad (4.23)$$

$$= -j \frac{E_0}{\delta \omega} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp(j\omega t) \vec{u}_z \quad (4.24)$$

D'où, en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\delta \omega} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ est la profondeur de pénétration de l'onde dans le plasma.

c- Il s'agit d'une onde stationnaire oscillant "surplace" avec une pulsation ω et une amplitude qui décroît exponentiellement selon Ox , on dit que c'est une onde évanescente.

d-

$$\langle \vec{\pi}(x, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) \quad (4.25)$$

$$= \vec{0} \quad (4.26)$$

Arrivant à l'ionosphère, l'onde électromagnétique est totalement réfléchi.

2.3.3. Étude du cas $\omega > \omega_p$:

a-

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

b-

$$\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \exp j(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

En notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

c- Il s'agit d'une onde plane progressive et monochromatique se propageant dans le sens des x croissants.

d- On définit la vitesse de phase comme suit :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Dans notre cas :

$$v_\varphi = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Le milieu est dispersif car v_φ dépend de ω : le milieu de propagation sépare progressivement des ondes monochromatiques ayant des vitesses de phase différentes, on parle du phénomène de dispersion.

e- La vitesse de groupe est définie comme suit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

On a :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

$\Rightarrow$

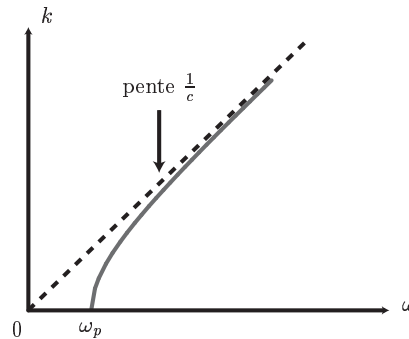
$$2kdk = 2 \frac{\omega d\omega}{c^2}$$

$\Rightarrow$

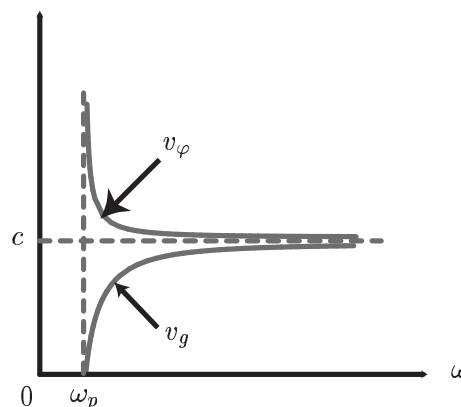
$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= c^2 \frac{k}{\omega} \\ &= c \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} \end{aligned}$$

Sa signification physique : la vitesse de groupe est la vitesse du "sommet" de l'enveloppe d'un paquet d'onde. Elle n'a de signification physique réelle que lorsque le milieu de propagation est peu dispersif et donc le paquet d'onde qui s'y propage, est moins déformé.

f- Tracé de k en fonction de ω :



Tracé de v_g et v_φ en fonction de ω :



On remarque que $v_\varphi > c$: célérité de la lumière dans le vide. C'est pas étonnant, puisque la vitesse de phase est la vitesse des plans équiphases (plans immatériels).

$v_g < c$.

Si $\omega > \omega_p \implies \lambda < \lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = 2\pi c \sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{n_0 e^2}} \simeq 334,2 \text{ m}$, l'onde traverse l'ionosphère.

Si $\omega < \omega_p \implies \lambda > 334,2 \text{ m}$, l'onde est réfléchiée vers le sol, et donc un récepteur situé au sol peut enregistrer le signal.

L'altitude de l'ionosphère est :

$$h = \frac{ct}{2} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3}}{2} = 90 \text{ km}$$

2.4. Application à la transmission de l'information

2.4.1. L'ordre de grandeur de la longueur d'onde correspondant à quelques centaines de kHz est :

$$\lambda \approx \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^5} = 3 \text{ km}$$

Cette longueur d'onde est $> 334,2 \text{ m}$, d'où la possibilité de recevoir ces ondes (voir question **2.3.3.f.** où la condition de réflexion des ondes vers le sol est $\lambda > 334,2 \text{ m}$).

2.4.2. L'ordre de grandeur de la longueur d'onde correspondant à quelques centaines de MHz est :

$$\lambda \approx \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3m$$

Cette longueur d'onde est $< 334,2 \text{ m}$. ces ondes peuvent donc traverser l'ionosphère, arriver jusqu'au satellite qui les renvoie vers le sol (voir question **2.3.3.f.** où on a montré que les ondes ayant une longueur d'onde $< 334,2 \text{ m}$, peuvent traverser l'ionosphère.