

Problème : Ondes électromagnétiques dans un plasma

Dans ce problème, On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma, avec application à l'ionosphère terrestre (en vue de communiquer à l'aide de satellites artificiels).

1. Préambule

1.1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants. En déduire les équations de propagation des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$.

1.2. On considère une onde du type $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$, où $E_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^+$, et $\omega \in \mathbb{R}^+$. Caractériser cette onde, en définissant chaque terme cité. Caractériser également sa polarisation en justifiant la réponse.

1.3. À quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?

1.4. Déterminer le champ $\vec{B}(M, t)$.

1.5. L'onde considérée précédemment est-elle réalisable expérimentalement ? On justifiera soigneusement la réponse.

2. Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres $n_o = 10^{10} m^{-3}$ et une densité volumique de cations, de charge $+e$ et de masse $M = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$, égale elle aussi à n_o . L'ensemble est donc globalement neutre. On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\vec{E}(M, t) = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$.

2.1. Position du problème

2.1.1. Comparer la densité volumique d'électrons libres dans un métal conducteur comme le cuivre, à la densité volumique d'électrons libres n_o dans l'ionosphère. Quelle force, exercée sur les électrons libres, et dont on tient compte dans un conducteur métallique, peut-on négliger dans l'ionosphère ? Justifier la réponse.

2.1.2. Faire un bilan de toutes les forces appliquées à un électron libre et préciser lesquelles sont négligeables.

2.1.3. Pour un fluide, rappeler l'expression du champ des vecteurs accélération $\vec{a}(M, t)$ en fonction du champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$, à l'aide de la dérivée particulaire. Mettre en évidence deux termes dont on donnera les noms. En considérant ici l'ensemble des électrons comme un fluide, comment se simplifie $\vec{a}(M, t)$ compte tenu de $\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$?

2.2. Mouvement des électrons libres et conductivité

2.2.1. En utilisant **2.1.**, déterminer le champ des vecteurs vitesse $\vec{v}(x, t)$ des électrons libres.

2.2.2. On désire calculer la conductivité du milieu. Déterminer le vecteur densité de courant $\vec{j}(x, t)$ en expliquant quels sont les porteurs de charge dont on peut négliger le mouvement. En déduire la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ définie par la relation $\vec{j}(x, t) = \underline{\sigma} \vec{E}(x, t)$. Quelle est la principale différence avec la conductivité

d'un métal lorsqu'on se place à basse fréquence ?

2.2.3. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Ce résultat est-il cohérent avec la conclusion du **2.1.1.** ?

2.3 Propagation du champ électromagnétique

2.3.1. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(x, t)$ dans le plasma. En déduire la relation entre k^2 et ω^2 . Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Dans deux questions qui suivent (**2.3.2** et **2.3.3.**), on suppose que le plasma occupe le demi-espace $x \geq 0$ et que l'onde est émise à partir de $x = 0$.

2.3.2. Étude du cas $\omega < \omega_p$:

a- Donner la relation $k(\omega)$.

b- En déduire les champs $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ en notation réelle.

c- Caractériser l'onde obtenue en définissant chaque terme cité.

d- Calculer $\langle \vec{\pi}(x, t) \rangle$, valeur moyenne dans le temps du vecteur réel de POYNTING. Décrire alors qualitativement ce que devient une onde électromagnétique envoyée depuis le sol en direction de l'ionosphère.

2.3.3. Étude du cas $\omega > \omega_p$:

a- Donner la relation $k(\omega)$.

b- En déduire les champs $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ en notation réelle.

c- Caractériser l'onde obtenue.

d- Définir et calculer la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette onde. Le milieu est-il dispersif ? (justifier la réponse).

e- Définir et calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ de cette onde. En donner la signification physique.

f- Tracer $k(\omega)$, $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ en faisant apparaître les valeurs particulières et les branches asymptotiques, comparer $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Conclure.

Au sol un émetteur envoie verticalement une onde hertzienne de fréquence réglable. Expliquer les phénomènes observés en fonction de la fréquence (ou de la longueur d'onde). En-dessus de quelle valeur de la longueur d'onde λ un récepteur situé au sol enregistre-t-il un signal ? Calculer l'altitude de l'ionosphère, sachant que le signal est reçu à 0,6 ms après l'émission.

2.4. Application à la transmission de l'information

2.4.1. La première liaison radio transatlantique fut réalisée par Marconi en 1901 ; il fut alors possible de recevoir des ondes de fréquences de quelques centaines de kHz . Expliquer le phénomène.

2.4.2. Les communications sol-sol tendent à être remplacées par des communications sol-satellite-sol utilisant des fréquences de quelques centaines de MHz . Expliquer pourquoi cela est possible ?