

Correction : Propagation d'une onde dans un plasma en présence d'un champ magnétique constant longitudinal : Effet FARADAY

1. L'équation du mouvement d'un électron :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} &= -e \left(\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{v}} \wedge \underline{\vec{B}}_0 \right) \\ im\omega \underline{\vec{v}} &= -e \left(\underline{\vec{E}} - v_x B_0 \underline{\vec{e}}_y + v_y B_0 \underline{\vec{e}}_x \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{\vec{v}} \begin{cases} \underline{v}_x = \frac{ie}{m\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \\ \underline{v}_y = \frac{ie}{m\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_y - i \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \\ \underline{v}_z = 0 \end{cases}$$

2.

$$\underline{\vec{j}} \begin{cases} \underline{j}_x = -ne\underline{v}_x = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \\ \underline{j}_y = -ne\underline{v}_y = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_y - i \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \\ \underline{j}_z = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\underline{\vec{j}} \begin{cases} \underline{j}_x = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \\ \underline{j}_y = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_y - i \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \underline{\sigma} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

avec :

$$\underline{\sigma} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \begin{pmatrix} -i\omega & \omega_c \\ -\omega_c & -i\omega \end{pmatrix}$$

3. À partir des équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned} \text{div} \underline{\vec{E}} &= 0 \\ \text{rot} \underline{\vec{E}} &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \text{div} \underline{\vec{B}} &= 0 \\ \text{rot} \underline{\vec{B}} &= \mu_0 [\underline{\sigma}] \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{aligned}$$

On établit l'équation de propagation du champ électrique :

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 [\underline{\sigma}] \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

D'où :

$$\left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0\omega[\underline{\sigma}] \right) \underline{\vec{E}} = 0$$

En projetant cette relation sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, on trouve :

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) (\omega^2 - \omega_c^2) - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2} \right] E_x = i \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{c^2} E_y \\ \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) (\omega^2 - \omega_c^2) - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2} \right] E_y = i \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{c^2} E_x \end{cases}$$

4. Ce système admet des solutions non nulles si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) (\omega^2 - \omega_c^2) - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2} & -i \frac{\omega^2 \omega \omega_c}{c^2} \\ -i \frac{\omega_p^2 \omega \omega_c}{c^2} & \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) (\omega^2 - \omega_c^2) - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

D'où :

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) (\omega^2 - \omega_c^2) - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{c^2} \right]^2 = \left[\frac{\omega_p^2 \omega \omega_c}{c^2} \right]^2$$

c'est l'équation de dispersion.

Ses solutions correspondent à :

$$\begin{aligned} \underline{k}_1^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right) \\ \underline{k}_2^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right) \end{aligned}$$

$\underline{k}_1$ est réel pour :

$$\begin{cases} \omega^2 - \omega_c \omega - \omega_p^2 \geq 0 \\ \text{et } \omega > \omega_c \end{cases}$$

c'est à dire pour :

$$\omega \geq \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

$\underline{k}_2$ est réel pour :

$$\omega^2 + \omega_c \omega - \omega_p^2 \geq 0$$

c'est à dire pour :

$$\omega \geq \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2}$$

AN : $\omega_c = 1,76.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_p = 5,64.10^7 \text{ rad.s}^{-1}$

d'où : $\underline{k}_1$ réel pour $\omega \geq 5,73.10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\underline{k}_2$ réel pour $\omega \geq 5,55.10^7 \text{ rad.s}^{-1}$.

5.

5.1. Pour une OEMPPM se propageant dans le sens des z croissant avec $\underline{k}_1$ et $\underline{k}_2$ réels, on a :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right]} \\ k_2 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right]} \end{aligned}$$

Pour k_1 le champ électrique est telle que (d'après l'équation de dispersion projetée sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$) :

$$\underline{E}_{x1} = i\underline{E}_{y1}$$

D'où :

$$\vec{E}_1 \left| \begin{array}{l} E_{x1} = E_{01} \exp i(\omega t - k_1 z) \\ E_{y1} = -iE_{01} \exp i(\omega t - k_1 z) \end{array} \right.$$

L'OEMPPM est donc **polarisée circulairement gauche**.

Sa vitesse de phase est :

$$v_{\varphi 1} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)}}$$

Pour k_2 le champ électrique est telle que (d'après l'équation de dispersion projetée sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$) :

$$\underline{E}_{x2} = -i\underline{E}_{y2}$$

D'où :

$$\vec{E}_2 \left| \begin{array}{l} E_{x2} = E_{02} \exp i(\omega t - k_2 z) \\ E_{y2} = iE_{02} \exp i(\omega t - k_2 z) \end{array} \right.$$

L'OEMPPM est donc **polarisée circulairement droite**.

Sa vitesse de phase est :

$$v_{\varphi 2} = \frac{\omega}{k_2} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}\right)}}$$

5.2.

5.2.1 En $z = 0$:

$$E_0 \exp i(\omega t) \vec{e}_x = \left[\frac{1}{2} E_0 \exp i\omega t (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \right] + \left[\frac{1}{2} E_0 \exp i\omega t (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \right]$$

Le premier terme entre crochets correspond à une OEMPPM polarisée circulairement gauche et le 2ème terme à une OEMPPM polarisée circulairement droite.

Or on a montré qu'une OEMPPM polarisée circulairement gauche a une vitesse de phase $v_{\varphi 1}$, elle s'écrit donc en $z > 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2} E_0 \exp i(\omega t - k_1 z) (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$$

De même l'OEMPPM polarisée circulairement droite, s'écrit en $z > 0$:

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{2} E_0 \exp i(\omega t - k_2 z) (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$$

D'où le champ électrique total en $z > 0$ est :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= \underline{E}_x \vec{e}_x + \underline{E}_y \vec{e}_y \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\underline{E}_x &= \frac{1}{2}E_0[\exp i(\omega t - k_1 z) + \exp i(\omega t - k_2 z)] \\ \underline{E}_y &= \frac{i}{2}E_0[\exp i(\omega t - k_2 z) - \exp i(\omega t - k_1 z)]\end{aligned}$$

La direction de polarisation a tournée de θ tel que :

$$\tan \theta = \frac{\underline{E}_y}{\underline{E}_x} = i \frac{\exp(-ik_2 z) - \exp(-ik_1 z)}{\exp(-ik_1 z) + \exp(-ik_2 z)} = \tan \left(\frac{k_2 - k_1}{2} z \right)$$

D'où :

$$\theta = \frac{k_2 - k_1}{2} z$$

5.2.2. Puisque $\omega \gg \omega_p, \omega_c$, alors :

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right] \\ k_2 &= \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right]\end{aligned}$$

d'où :

$$\theta = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^2 c} z$$

AN :

$$\theta \simeq 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

5.3. Si k_1 est imaginaire et k_2 réel, l'onde polarisée rectilignement arrivant sur le plasma, va s'y propager sous forme d'une onde polarisée circulairement droite, puisque l'onde circulaire gauche est évanescence.

Si k_1 et k_2 sont imaginaires, l'onde se réfléchit entièrement sur le plasma.