

Problème : Propagation d'une onde dans un plasma en présence d'un champ magnétique constant longitudinal : Effet FARADAY

Le plasma ionosphérique est un gaz ionisé dilué contenant n_0 électrons (charge $-e$ et masse m) et n_0 ions positifs par unité de volume. On y crée un champ magnétique statique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ et on s'intéresse à une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation ω , se propageant parallèlement à $\vec{B}_0$ et dont le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E_{0x} \exp i(\omega t - \underline{k}z) \\ E_y = E_{0y} \exp i(\omega t - \underline{k}z) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

On note $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$ la pulsation plasma et $\omega_c = \frac{e B_0}{m}$ la pulsation cyclotron. On se place dans l'approximation linéaire.

1. Exprimer, en notation complexe, le vecteur vitesse d'un électron.
2. En déduire une loi d'OHM généralisée $\vec{j} = [\sigma] \vec{E}$ où $[\sigma]$ une matrice que l'on déterminera en fonction de ε_0 , ω_p , ω_c et ω .
3. Donner l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$. En déduire un système linéaire vérifié par $\underline{E}_x$ et $\underline{E}_y$.
4. À quelle condition ce système admet-t-il des solutions non identiquement nulles? En déduire l'équation de dispersion. Montrer qu'elle admet deux solutions $\underline{k}_1$ et $\underline{k}_2$ telles que :

$$\underline{k}_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right)$$

$$\underline{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right)$$

À quelles conditions sur ω , les grandeurs $\underline{k}_1$ et $\underline{k}_2$ sont-elles réelles?

AN : $n_0 = 10^{12} \text{ e}^-/\text{m}^3$ et $B_0 = 10^{-5} \text{ T}$.

5. La pulsation ω est telle que $\underline{k}_1$ et $\underline{k}_2$ sont réelles.
 - 5.1. Quelles sont les polarisations des ondes planes correspondant aux solutions $\underline{k}_1$ et $\underline{k}_2$? On écrira explicitement les champs correspondants $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$. Avec quelle vitesse de phase se propage chacune d'elles?
 - 5.2. Une onde de fréquence ω arrive sur le plasma en $z = 0$. Elle est polarisée rectilignement avec un champ $\vec{E}(z = 0)$ suivant Ox .
 - 5.2.1. Montrer que cette onde est la superposition de deux ondes du type de celles obtenues à la question 5.1.. En déduire qu'après la distance de propagation $z > 0$, l'onde initiale est toujours polarisée rectilignement, mais que sa direction de polarisation a tourné autour de Oz d'un angle θ à exprimer en fonction de $\underline{k}_1$, $\underline{k}_2$ et z .
 - 5.2.2. Sachant que $\omega \gg \omega_p$ et à ω_c , montrer que θ est proportionnel à z et à B_0 (c'est l'effet FARADAY).

AN : Calculer θ pour n_0 et B_0 inchangés, $z = 1 \text{ km}$ et $f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ MHz}$.

- 5.3. Indiquer, sans calcul, ce qui se passe lorsque ω est telle qu'une seule valeur $\underline{k}_1$ ou $\underline{k}_2$ est réelle, ou bien aucune.