

4.1 Oscillations de plasma

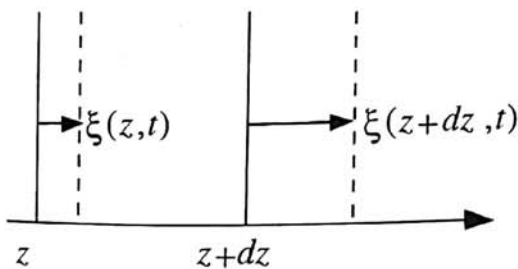
Le but de cet exercice est d'introduire simplement la grandeur ω_p , pulsation plasma, qui est utile dans les exercices suivants.

Un plasma gazeux, globalement neutre, comprend, placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge $-e$ susceptibles de se déplacer. Soient n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène, et $\xi(z, t)$ un petit déplacement d'ensemble suivant l'axe Oz des électrons situés en z quand le plasma est au repos. L'agitation thermique et le poids sont négligés.

- a) En raisonnant sur une tranche comprise entre z et $z + dz$ quand le plasma est au repos, donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement en supposant $|\partial\xi/\partial z|$ petit devant 1, et en déduire la densité de charge totale ρ du plasma.
- b) Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}$ et que sous l'action de ce champ les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m}$.

AN : Calculer $f_p = \omega_p/2\pi$ pour $n = 10^6 \text{ cm}^{-3}$ (ionosphère) et $n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ (décharge dans un gaz à forte densité).

a)



Dans le mouvement, la conservation du nombre d'électrons compris au repos dans la tranche de section S entre z et $z + dz$ s'écrit :

$$n^- S(dz + \xi(z + dz, t) - \xi(z, t)) = nS dz$$

$$\text{d'où } n^-(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}) = n$$

$$\text{soit } n^- \simeq n(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z}) \text{ car } \left| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right| \ll 1.$$

Les protons étant fixes, leur densité n'a pas varié soit $n^+ = n$, d'où la densité de charge totale :

$$\rho = n^+ e - n^- e \Rightarrow$$

$$\rho = ne \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

- b) Vu le problème étudié, le champ électrique résultant ne peut avoir de composante que sur Oz , et cette composante ne peut dépendre que de z et de t .

L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ s'écrit alors

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{ne}{\epsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial z} \text{ soit}$$

$$\vec{E}(z, t) = \frac{ne}{\epsilon_0} \vec{\xi}(z, t)$$

le champ macroscopique étant nul dans un plasma au repos.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au "fluide" d'électrons de la tranche s'écrit au premier ordre et après simplification par $n^- S dz$:

$$m \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -e \vec{E} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} \vec{\xi}, \text{ d'où un mouvement oscillatoire de pulsation}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

AN : $n = 10^{12} \text{ m}^{-3} \Rightarrow f_p = 8,97 \text{ MHz}$ (ondes décimétriques)
 $n = 10^{21} \text{ m}^{-3} \Rightarrow f_p = 2,84 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$ (ondes millimétriques)

NB : Il s'agit ici d'un champ électrique **longitudinal**, c'est-à-dire dans le sens du mouvement. La perturbation mécanique initiale crée un champ qui crée une force de rappel ... en fait, mouvement et champ s'entretiennent mutuellement. Il s'agit d'un comportement analogue à celui des ondes acoustiques ; il existe aussi sous la forme de "plasmons" dans les conducteurs où f_p est dans l'ultraviolet car n y est beaucoup plus grand (voir exercice 3.7 § C).

4.2 Dispersion dans le plasma interstellaire

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m , de charge électrique $-e$, de nombre volumique n , en mouvement non relativiste de vitesse $\vec{v}$, et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes planes progressives de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- 1.a) Montrer, à partir des équations de Maxwell, que de telles solutions supposent que la densité de courant $\vec{j}$ soit elle-même une OPPM du type

$$\vec{j} = \vec{j}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Exprimer $\vec{j}_0$ en fonction de ω , $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$.