

- c) Si k^- est imaginaire et k^+ réel, l'onde polarisée rectilignement en arrivant sur le plasma va s'y propager sous forme d'onde polarisée circulairement à droite (car la circulaire gauche est évanescence).

Si k^- et k^+ sont imaginaires, aucune des deux circulaires ne s'y propage ; l'onde ne pénètre pas dans le plasma, mais s'y réfléchit entièrement.

4.6 Effet Cotton-Mouton (dans $\vec{B}_c$ transversal)

Se reporter au début de l'exercice 4.3 pour les hypothèses et approximations faites sur le plasma, ainsi que pour les notations.

Le plasma est à présent plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_c$ parallèle à Oy et dirigé vers les y croissants ($\vec{B}_c$ transversal).

Le champ électrique de l'onde est toujours de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ avec a priori trois composantes E_x , E_y , E_z et $\vec{E}_0$ complexe pour n'exclure aucun type de polarisation.

$\vec{B}_c$ est suffisamment intense pour en tenir compte dans la force de Lorentz.

Notations : pulsations plasma : $\omega_p = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 m}$ et cyclotron : $\omega_c = eB_c/m$.

1. Donner en régime sinusoïdal permanent, les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ des électrons puis en déduire celles du courant $\vec{j}$ en fonction de celles de $\vec{E}$, de ϵ_0 , ω_p , ω_c et ω (relations (1)).
- 2.a) A l'aide d'une équation de Maxwell et de la loi de conservation de la charge, donner deux expressions de la densité volumique de charge ρ . Justifier physiquement que $\rho \neq 0$ et en déduire j_z en fonction de la composante longitudinale E_z du champ électrique de l'onde.
- b) De manière plus générale donner une relation vectorielle entre $\vec{j}$, $\vec{E}$ et $\vec{k}$ à partir des autres équations de Maxwell (relation (2)).
- 3.a) Montrer que la condition de compatibilité de deux systèmes d'équations (1) et (2) conduit à l'équation de dispersion ; k prend alors une valeur k' à expliciter sous la forme k'^2 .
- b) Montrer que $E_y \neq 0$ seulement si k prend une valeur k'' à préciser par k''^2 .
4. La pulsation ω est telle que $\omega \gg \omega_p$ et ω_c ; k' et k'' sont pris positifs pour une propagation suivant Oz^+ .
- a) Donner les expressions approchées de k' et k'' jusqu'aux corrections en $1/\omega^4$ incluses.

- b) En déduire que deux ondes de même pulsation et de vecteurs d'onde respectifs $\vec{k}'$ et $\vec{k}''$, en phase dans le plan $z = 0$, prennent après un parcours z , une différence de phase $\Delta\varphi$ proportionnelle à z et à B_c^2 .

AN : $N = 10^{12} \text{ e}^-/\text{m}^3$, $B_c = 10^{-5} \text{ T}$, $z = 1 \text{ km}$ et $f = \omega/2\pi = 100 \text{ MHz}$.
Calculer $\Delta\varphi$.

1. La relation fondamentale de la dynamique appliquée aux électrons s'écrit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_c)$ en négligeant l'action de $\vec{B}$, et avec $\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ à des termes d'ordre supérieur près, en notation complexe :

$$mi\omega \begin{vmatrix} \underline{v}_x \\ \underline{v}_y \\ \underline{v}_z \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} \underline{v}_x \\ \underline{v}_y \\ \underline{v}_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B_c \\ 0 \end{vmatrix}$$

et en résolvant avec $\omega_c = \frac{eB_c}{m}$,
$$\begin{cases} \underline{v}_x = -\frac{ie}{m\omega} \frac{\underline{E}_x + i(\omega_c/\omega)\underline{E}_z}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ \underline{v}_y = -\frac{ie}{m\omega} \underline{E}_y \\ \underline{v}_z = -\frac{ie}{m\omega} \frac{\underline{E}_z - i(\omega_c/\omega)\underline{E}_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases}$$

Alors le courant (électronique) s'obtient par $\vec{j} = -Ne\vec{v}$, et en posant $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$

$$\begin{cases} \underline{j}_x = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\underline{E}_x + i(\omega_c/\omega)\underline{E}_z}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ \underline{j}_y = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{E}_y \\ \underline{j}_z = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\underline{E}_z - i(\omega_c/\omega)\underline{E}_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases} \quad (1)$$

Remarque : Comme pour l'effet Faraday où le champ $\vec{B}_c$ est longitudinal, ici le champ $\vec{B}_c$ transversal introduit une anisotropie (Oy devient direction privilégiée). Le milieu reste linéaire, mais la conductivité n'est plus un scalaire, mais un tenseur (ou matrice) $[\sigma]$ avec $\vec{j} = [\sigma]\vec{E}$.

- 2.a) L'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \implies i\vec{k} \cdot \vec{j} - i\omega \rho = 0 \implies \rho = \frac{k}{\omega} j_z \\ \text{div } \vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \implies i\vec{k} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \implies \rho = i\epsilon_0 k E_z \end{aligned}$$

La force magnétique $-e\vec{v} \wedge \vec{B}_c$ est ici longitudinale suivant Oz puisque $\vec{B}_c$ est transversal et que $\vec{v}$ est essentiellement dans le plan xOy . Cette force, comme $\vec{v}$, change de sens toutes les $1/2$ longueurs d'onde ce qui induit dans le plasma des compressions et des détentes dans le sens de la propagation. Les ions étant fixes, ce mouvement d'électrons (du type acoustique) rend le plasma localement chargé et engendre une onde de densité de charge. On en déduit que $\vec{E}$ a une composante longitudinale E_z non nulle. (L'onde n'est plus transverse électrique, mais reste bien sûr transverse magnétique par $\text{div } \vec{B} = 0$).

En éliminant $\underline{\rho}$, il vient

$$\underline{j}_z = i\varepsilon_0\omega \underline{E}_z$$

b) L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

Reportée dans l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ cela conduit à $i\vec{k} \wedge (\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}) = \frac{i}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - i\frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \mu_0 \vec{j} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$

avec $\vec{k} \cdot \vec{E} = kE_z \neq 0$,

$$\vec{j} = \frac{i}{\mu_0\omega} (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \vec{E} + i\frac{kE_z}{\mu_0\omega} \vec{k} \quad (2)$$

Projetée sur Oz , la relation (2) redonne le résultat précédent $\underline{j}_z = i\varepsilon_0\omega \underline{E}_z$ car l'équation de conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell.

3.a) Écrivons l'identité des composantes $\underline{j}_x$ et $\underline{j}_z$ par les relations (2) et (1)

$$\begin{cases} \underline{j}_x = \frac{i}{\mu_0\omega} (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \underline{E}_x = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \underline{E}_x + i(\omega_c/\omega) \underline{E}_z}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ \underline{j}_z = i\varepsilon_0\omega \underline{E}_z = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \underline{E}_z - i(\omega_c/\omega) \underline{E}_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} [(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}) - \frac{\omega_p^2}{c^2}] \underline{E}_x = \frac{\omega_p^2}{c^2} (i\frac{\omega_c}{\omega}) \underline{E}_z \\ [\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}) - \frac{\omega_p^2}{c^2}] \underline{E}_z = \frac{\omega_p^2}{c^2} (-i\frac{\omega_c}{\omega}) \underline{E}_x \end{cases}$$

Il n'y a de solution non triviale à ce système d'équations linéaires et homogènes que si k et ω vérifient la relation de dispersion :

$$[(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}) - \frac{\omega_p^2}{c^2}] [\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}) - \frac{\omega_p^2}{c^2}] = (\frac{\omega_p^2}{c^2})^2 (\frac{\omega_c}{\omega})^2$$

d'où la valeur k' que prend alors k :

$$k'^2 = \frac{\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]^2 - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2}\right)^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]}$$

le numérateur est une différence de deux carrés ; après réduction

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1 - \frac{\omega_c^2 + 2\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^4}{\omega^4}}{1 - \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2}{\omega^2}}$$

b) Reste à identifier les expressions de $\underline{j}_y$ données par (2) et (1) :

$$\underline{j}_y = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{E}_y = i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{E}_y$$

ce qui montre que $\underline{E}_y \neq 0$ pour $k = k''$ tel que $\frac{\omega^2}{c^2} - k''^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$

soit

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

4.a) Un calcul simple donne les développements limités demandés :

$$k' \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_c^2 \omega_p^2}{2\omega^4} - \frac{\omega_p^4}{8\omega^4} \right)$$

et

$$k'' \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_p^4}{8\omega^4} \right)$$

b) Deux composantes d'onde l'une en $\cos(k'z - \omega t)$ l'autre en $\cos(k''z - \omega t)$ n'ont pas même vitesse de phase. A z donné, $\forall t$ il apparaît une différence de phase $\Delta\varphi = (k'' - k')z$. C'est cette expression qui justifie le calcul de k' et k'' aux termes en $1/\omega^4$ inclus puisque les termes correctifs (par rapport à ω/c) en $1/\omega^2$ sont égaux.

d'où

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{2c\omega^3} z$$

proportionnel à z et à B_c^2 (dans ω_c^2)

$$AN : \omega_p = 5,64 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1} ; \omega_c = 1,76 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{d'où } \Delta\varphi = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 13,7''$$

Remarquer que $\Delta\varphi = \theta\omega_c/\omega$ ce qui dans l'ionosphère (plasma terrestre) rend l'effet Cotton-Mouton (donné par $\Delta\varphi$) beaucoup plus faible que l'effet Faraday (donné par θ) (voir exercice 4.5).

4.7 Longueur de Debye - Effet d'écran

Si un plasma est globalement neutre, localement une charge positive a tendance à attirer les électrons et à repousser les ions positifs ; la neutralité électrique est valable pour des éléments de volume suffisamment importants.

Préliminaire : Dans un ensemble de particules de charge q et de densité d'équilibre n_0 , est introduite une charge test q' qui a pour effet de modifier la distribution précédente ; q' est placée à l'origine d'un système de coordonnées sphériques, et les charges qui l'entourent, créent un potentiel à symétrie sphérique $V(r)$. La distribution $n(r)$ de charge résultant de cette perturbation est un système à l'équilibre thermodynamique à la température T , où règne une pression $P(r) = n(r)kT$.

Écrire l'équilibre de ces charges sous l'effet de la force électrique et des forces de pression et trouver l'équation différentielle vérifiée par $n(r)$. Montrer, après une intégration tenant compte des conditions aux limites, que la densité $n(r)$ obéit à la loi de Boltzmann, $n(r) = n_0 \exp(-qV/kT)$.

Un plasma contient en moyenne autant d'ions positifs de charge $+e$ que d'électrons de charge $-e$; cette densité moyenne est n_0 . On se propose de trouver le potentiel qui règne autour d'un ion positif.

1. Les densités $n_i(r)$ et $n_e(r)$ obéissent à la loi de Boltzmann.
- a) Donner l'expression de la charge volumique à la distance r de l'ion positif considéré. Que devient-elle lorsque $eV \ll kT$, hypothèse retenue dans la suite ?
- b) En intégrant l'équation de Poisson, montrer que l'expression générale du potentiel se met sous la forme :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp(-r/\lambda_D) + \frac{B}{r} \exp(r/\lambda_D)$$

Donner l'expression de la longueur de Debye λ_D . (Rappel : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$)