

$$AN : \omega_p = 5,64 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1} ; \omega_c = 1,76 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{d'où } \Delta\varphi = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 13,7''$$

Remarquer que $\Delta\varphi = \theta\omega_c/\omega$ ce qui dans l'ionosphère (plasma terrestre) rend l'effet Cotton-Mouton (donné par $\Delta\varphi$) beaucoup plus faible que l'effet Faraday (donné par θ) (voir exercice 4.5).

4.7 Longueur de Debye - Effet d'écran

Si un plasma est globalement neutre, localement une charge positive a tendance à attirer les électrons et à repousser les ions positifs ; la neutralité électrique est valable pour des éléments de volume suffisamment importants.

Préliminaire : Dans un ensemble de particules de charge q et de densité d'équilibre n_0 , est introduite une charge test q' qui a pour effet de modifier la distribution précédente ; q' est placée à l'origine d'un système de coordonnées sphériques, et les charges qui l'entourent, créent un potentiel à symétrie sphérique $V(r)$. La distribution $n(r)$ de charge résultant de cette perturbation est un système à l'équilibre thermodynamique à la température T , où règne une pression $P(r) = n(r)kT$.

Écrire l'équilibre de ces charges sous l'effet de la force électrique et des forces de pression et trouver l'équation différentielle vérifiée par $n(r)$. Montrer, après une intégration tenant compte des conditions aux limites, que la densité $n(r)$ obéit à la loi de Boltzmann, $n(r) = n_0 \exp(-qV/kT)$.

Un plasma contient en moyenne autant d'ions positifs de charge $+e$ que d'électrons de charge $-e$; cette densité moyenne est n_0 . On se propose de trouver le potentiel qui règne autour d'un ion positif.

1. Les densités $n_i(r)$ et $n_e(r)$ obéissent à la loi de Boltzmann.
- a) Donner l'expression de la charge volumique à la distance r de l'ion positif considéré. Que devient-elle lorsque $eV \ll kT$, hypothèse retenue dans la suite ?
- b) En intégrant l'équation de Poisson, montrer que l'expression générale du potentiel se met sous la forme :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp(-r/\lambda_D) + \frac{B}{r} \exp(r/\lambda_D)$$

Donner l'expression de la longueur de Debye λ_D . (Rappel : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$)

AN : Calculer λ_D pour :

- l'ionosphère : $n_0 = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ et $T = 273 \text{ K}$;
- un plasma de synthèse : $n_0 = 10^{17} \text{ m}^{-3}$ et $T = 2300 \text{ K}$

- c) En tenant compte des conditions aux limites de l'ion positif, donner la valeur des constantes d'intégration.
2. En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$ et la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de rayon r . Que vaut $Q(r)$ si $r \rightarrow 0$ ou si $r \gg \lambda_D$. Conclusion ?
3. Tracer sur un même graphe $V(r)$ et le potentiel $V_0(r)$ créé par un ion dans le vide. Interpréter "l'effet d'écran".

Préliminaire : La somme des deux forces volumiques est nulle à l'équilibre :

$$n(r)q\vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

En statique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$;

par ailleurs $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{dP}{dr}\vec{u}_r = kT\frac{dn}{dr}\vec{u}_r$ (équation du gaz parfait)

il vient : $nq\frac{dV}{dr} + kT\frac{dn}{dr} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{q}{kT}dV$$

A l'infini la distribution n'est pas perturbée, soit $n = n_0$; en plus, on y choisit le potentiel nul, l'intégration conduit alors à :

$\ln \frac{n(r)}{n_0} = -\frac{q}{kT}(V(r) - 0) \Rightarrow$

$$n(r) = n_0 \exp(-qV(r)/kT)$$

L'énergie potentielle d'une charge q en un endroit où le potentiel est $V(r)$ est $U_p = +qV(r)$; la densité $n(r)$ est donc proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp(-U_p/kT)$ (voir exercice 4.8).

1.a) La densité volumique totale de charge est :

$$\rho(r) = (n_i(r) - n_e(r))e = n_0 e \left[\exp(-eV/kT) - \exp(eV/kT) \right]$$

$$\rho(r) = -2n_0 e \sinh(eV/kT) \simeq -\frac{2n_0 e^2}{kT} V(r) \quad \text{pour } eV \ll kT$$

b) L'équation de Poisson (en électrostatique) : $\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$

multipliée par r s'écrit : $\frac{d^2}{dr^2}(rV) = \frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 kT}(rV)$

équation qui s'intègre en : $rV(r) = A \exp(-r/\lambda_D) + B \exp(r/\lambda_D)$

soit

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D} + \frac{B}{r} e^{r/\lambda_D}$$

avec

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 e^2}}$$

AN : $\lambda_D = 0,81 \text{ mm}$ (ionosphère) ; $\lambda_D = 7,4 \mu\text{m}$ (plasma de synthèse)

c) La condition $V(r \rightarrow \infty) = 0$, valeur finie, impose $B = 0$

Pour r de l'ordre des dimensions atomiques, soit $r \ll \lambda_D$, il faut retrouver le potentiel coulombien de l'ion de charge $+e$ au centre :

$$\frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D} \simeq \frac{A}{r} \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \implies A = e/4\pi\epsilon_0 \text{ d'où}$$

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$$

2. Le champ électrique est $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + \frac{r}{\lambda_D}) e^{-r/\lambda_D} \cdot \vec{u}_r$

Alors le théorème de Gauss pour une sphère de rayon r donne :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{e}{\epsilon_0} (1 + r/\lambda_D) \exp(-r/\lambda_D) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

d'où

$$Q(r) = e(1 + r/\lambda_D) e^{-r/\lambda_D}$$

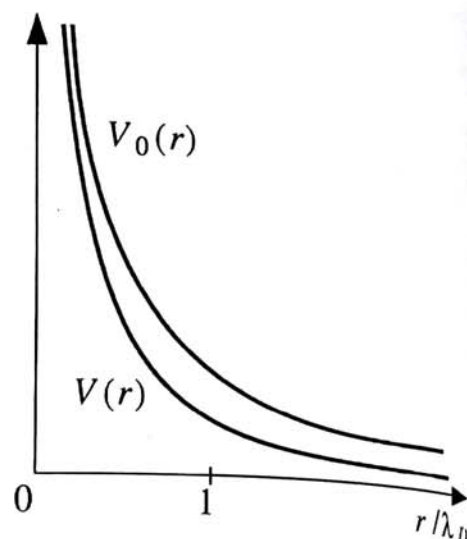
* pour $r/\lambda_D \ll 1$; $Q(r) \rightarrow e$ correspond au seul ion en O .

* pour $r/\lambda_D \gg 1$; $Q(r) \rightarrow 0$ décrit la neutralité électrique du plasma.

λ_D représente donc l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle la densité est localement perturbée.

3. $V(r) = V_0(r) e^{-r/\lambda_D}$. Près de l'ion central ($r \ll \lambda_D$), $V(r) \simeq V_0(r)$, les deux courbes ont des décroissances voisines.

Loin de l'ion central $V(r) \ll V_0(r)$ car ($r \gg \lambda_D$), le potentiel perçu décroît très vite puisque $Q(r) \rightarrow 0$; l'ion central est entouré d'une charge globale opposée à la sienne et qui lui fait écran. Ce phénomène s'observe également au niveau atomique où l'électron périphérique perçoit un noyau écranté par les couches plus profondes d'électrons ; il est ainsi moins fortement lié.



4.8 Ondes longitudinales ioniques

Le plasma considéré est un milieu complètement ionisé, composé de cations monovalents et d'électrons. Au repos, il est globalement neutre.

Les ions sont décrits comme un fluide sans agitation thermique caractérisé par les champs de concentration $n_i(M, t)$ et de vitesse $\vec{v}_i(M, t)$. D'après les hypothèses, la pression cinétique des ions est nulle. L'action des forces de pesanteur est négligée, ainsi que l'effet des collisions entre électrons et ions.

Les électrons, très légers, de masse m et de charge $-e$, sont assimilés à un gaz parfait localement toujours à l'équilibre thermique à une température T uniforme et constante. Leur densité est $n_e(M, t)$ et leur vitesse $\vec{v}_e(M, t)$. Lorsque le plasma est dans son état de repos : $n_i(M, t) = n_e(M, t) = n_0$.

Seules sont étudiées ici des ondes purement électriques, dont le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est longitudinal (ondes acoustiques ioniques) ; on admet que le potentiel vecteur $\vec{A}$ peut être choisi nul en tout point et à tout instant (correspondant à un champ magnétique nul) et que le potentiel scalaire $V(M, t)$ est nul pour le plasma à l'état de repos.

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M}} \text{ est la pulsation plasma liée aux ions (masse } M, \text{ charge } e).$$

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T}{n_0 e^2}} \text{ est la longueur de Debye liée à l'écrantage des ions.}$$

Ces deux notions sont définies dans les exercices 4.1 et 4.7.

1. Les équations du plasma ; linéarisation

- a) Si le potentiel V est indépendant du temps, donner l'expression de $n_e(M)$ en fonction de $V(M)$, de T et des grandeurs caractéristiques du gaz d'électrons en considérant que les conditions de l'équilibre relèvent de la statistique de Boltzmann (relation (1)). Calculer la vitesse quadratique moyenne u d'agitation thermique des électrons