

3.1 Réflexion normale d'une OPPM (pol. rect.)

Un conducteur parfait, c'est-à-dire de conductivité quasi-infinie, occupe toute la partie de l'espace correspondant à $z > 0$; sa surface libre avec l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide, est représentée par le plan xOy .

Une onde incidente, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k\vec{u}_z$ ($k > 0$), est caractérisée par son champ électrique polarisé rectilignement suivant Ox ; en notation complexe $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$.

1. Hypothèse du conducteur parfait

Que valent les champs $\vec{E}_c$ et $\vec{B}_c$ dans le conducteur parfait ?

2. Les conditions aux limites et l'onde réfléchie

- Justifier l'expression complète du champ électrique $\vec{E}_r$ de l'onde réfléchie.
- Donner les champs magnétiques, puis représenter à un instant donné en $z = 0$ les vecteurs $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$, $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$.
- Quelles sont sur le métal les densités surfaciques de charge σ et de courant $\vec{j}_s$?

3. Onde stationnaire résultante

- Exprimer en notation réelle, les champs résultants $\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$.
- Donner l'ensemble des caractéristiques de cette onde.
- Illustrer sur deux types de schéma (à t fixé, en fonction de z), les différences de cette onde stationnaire avec une onde progressive.

4. Étude énergétique

- Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique u , puis sa moyenne temporelle $\langle u \rangle$. Commenter le résultat.
- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$, puis sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$. Commenter le résultat.

5. Pression de radiation

- Montrer qu'un élément de surface dS parcouru par le courant $\vec{j}_s$ est soumis à la force $d\vec{f} = \vec{j}_s dS \wedge \frac{\vec{B}(z=0)}{2}$. Quel est le sens de $d\vec{f}$?

- b) Calculer la pression moyenne $\langle P \rangle$ à laquelle est soumise la surface métallique. En citer des applications.

6. Onde entre deux conducteurs

Un conducteur identique au précédent est placé en $z = -l$.

- a) Montrer que si l'on impose l , seules des ondes de fréquences ν_n bien définies peuvent convenir ; et inversement si l'on impose la longueur d'onde λ , alors le système ne peut exister que pour certaines longueurs l_n .
- b) Que se passe-t-il lorsque ces conditions ne sont pas réalisées ? Lorsqu'elles le sont, pourquoi parle-t-on d'ondes stationnaires résonnantes ?

1. Un conducteur parfait (résistance quasi-nulle ou conductivité σ quasi-infinie) ne dissipe pas d'énergie par effet Joule. La puissance volumique cédée par le champ $\vec{E}_c$ dans le conducteur au courant volumique $\vec{j}$ qu'il y provoque doit donc être nulle soit

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}_c = \sigma \vec{E}_c^2 \rightarrow 0 & \text{par application de la loi d'Ohm } \vec{j} = \sigma \vec{E}_c \\ \sigma \rightarrow \infty \end{cases}$$

on en déduit

$$\vec{E}_c = \vec{0}$$

Remarque : L'exercice 3.8 § 4 propose une démonstration plus complète.

L'équation de Maxwell-Faraday dans le conducteur s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_c = -\frac{\partial \vec{B}_c}{\partial t} = \vec{0} \implies \vec{B}_c = \vec{C} \text{sté}$$

Un champ magnétique statique ne peut être lié qu'à une distribution de courant permanent, ce qui n'est pas envisagé ici.

En régime variable, on a ainsi

$$\vec{B}_c = \vec{0}$$

L'onde électromagnétique ne pénètre pas dans un métal parfait.

- 2.a Le champ électrique de l'onde réfléchie est : $\vec{E}_r = \vec{E}_0' e^{i(\omega t + kz)}$

- * Onde sinusoïdale de même pulsation pour que les conditions aux limites soient satisfaites $\forall t$.
- * Un vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\vec{k}_i = -k\vec{u}_z$ de même module $k = \omega/c$ puisque le milieu

ne change pas, et de sens opposé car la réflexion sous incidence nulle ne privilégie pas d'autre direction dans l'espace (loi de Descartes).

- * $\text{div } \vec{E}_r = 0 \implies \vec{k}_r \cdot \vec{E}_r = 0$, le champ réfléchi est également transverse.
- * La continuité de la composante tangentielle (donc ici totale) du champ électrique en $z = 0$ donne :

$$\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{E}_c = \vec{0} \implies E_0 \vec{u}_x + \vec{E}'_0 = \vec{0}$$

donc $\vec{E}_r$ est polarisé rectilignement suivant Ox comme $\vec{E}_i$ et son amplitude est $E'_0 = -E_0$

Les champs électriques incident et réfléchi vibrent donc en opposition de phase dans le plan $z = 0$;

finalement

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$$

Remarque : En fait ces raisonnements ont un caractère quelque peu formel et dissimulent l'origine physique de l'onde réfléchie comme champ de rayonnement du courant surfacique harmonique engendré par l'onde incidente (voir exercice 5.9).

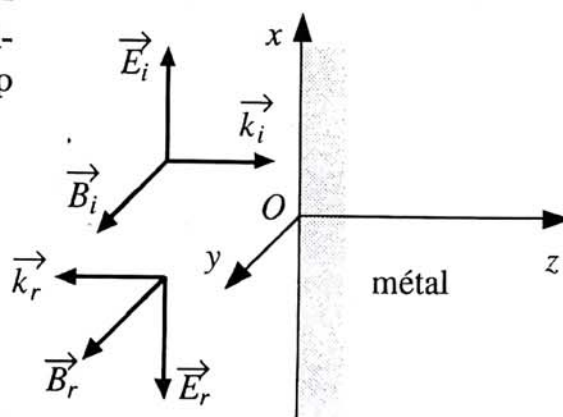
$$b) \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$$

Les champs magnétiques incident et réfléchi vibrent donc en phase dans le plan $z = 0$.

Remarque : L'inexistence de composante normale au plan métallique assure la continuité de la composante normale du champ magnétique en $z = 0$:

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r) \cdot \vec{u}_z = \vec{B}_c \cdot \vec{u}_z = 0$$

NB : les champs sont représentés pour $z = 0$



- c) $\vec{E}$ ne subit pas de discontinuité de composantes normales à la traversée de $z = 0$ puisqu'elles sont nulles,

d'où

$$\sigma = 0$$

La surface reste localement neutre.

En revanche $\vec{B}$ subit une discontinuité de composantes tangentielles en $z = 0$; il apparaît donc un courant surfacique de densité $\vec{j}_S$ donné par

$$\vec{0} - \left(\frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y \right) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z \Rightarrow$$

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

3.a) L'onde résultante est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) \vec{u}_x = -2iE_0 \sin kz e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

en réel

$$\vec{E}(z, t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) \vec{u}_y = 2 \frac{E_0}{c} \cos kz e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

en réel

$$\vec{B}(z, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos kz \cos \omega t \cdot \vec{u}_y$$

b) Il s'agit d'une onde plane ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent que de z et de t) de pulsation ω et $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz , mais là s'arrêtent les ressemblances avec l'OPPM.

* L'amplitude des champs dépend de z ;

- les nœuds sont les points d'amplitude nulle $\forall t$.

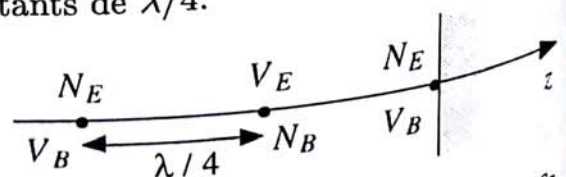
pour $\vec{E}$, $\sin kz = 0 \Rightarrow z_n = -\frac{n\pi}{k} \Rightarrow |z_n| = n \frac{\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}$.

- les ventres sont les positions où les champs vibrent avec une amplitude maximale au cours du temps.

pour $\vec{E}$, $\sin kz = \pm 1 \Rightarrow z_{n'} = -\frac{\pi}{2k} - \frac{n'\pi}{k} \Rightarrow |z_{n'}| = (n' + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}, n' \in \mathbb{N}$.

Ainsi deux nœuds ou deux ventres consécutifs de $\vec{E}$ sont distants de $\lambda/2$, mais un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

Remarque : $\vec{B}$ est en quadrature spatiale avec $\vec{E}$; les nœuds de $\vec{B}$ (N_B) correspondent ainsi à des ventres de $\vec{E}$ (V_E) et inversement.

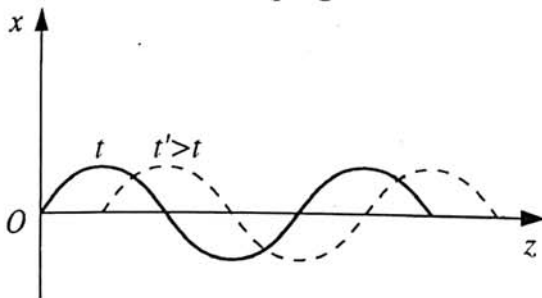


* Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne vibrent plus en phase comme pour une onde plane progressive. Les champs sont également en quadrature temporelle (différence de phase constante de $\pi/2$). Ceci est très important du point de vue énergétique.

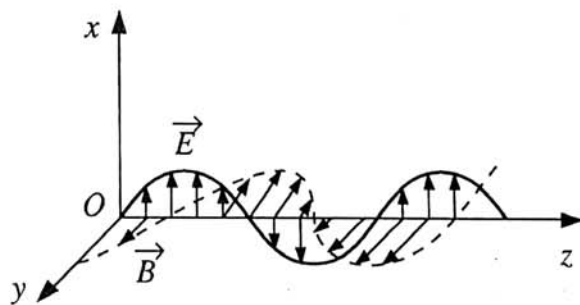
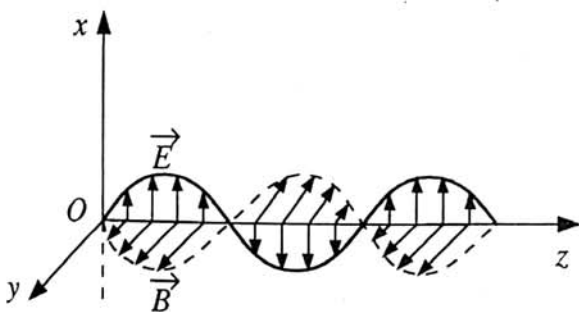
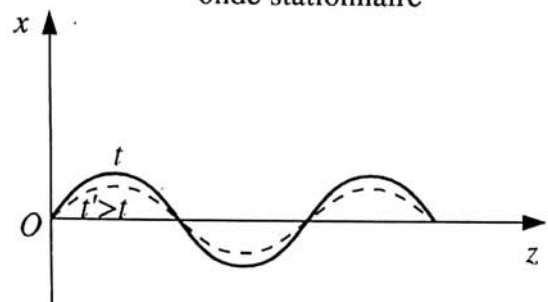
- * La propriété la plus importante est que le facteur de phase est indépendant de z et ne dépend plus que de t . Il n'y a donc plus propagation de la phase ; l'onde fait du "sur place", d'où la dénomination d'onde stationnaire. Entre deux nœuds consécutifs, en tout point un champ donné a même phase. De part et d'autre d'un nœud, à chaque instant, il y a opposition de phase.

c)

onde progressive



onde stationnaire



- 4.a) La densité volumique d'énergie électromagnétique est $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
- $$u(z, t) = 2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz \sin^2 \omega t + \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kz \cos^2 \omega t$$

La moyenne temporelle est :

$$\langle u(z) \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz + \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 kz \Rightarrow$$

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

Elle est indépendante du point considéré, comme pour une onde progressive où l'on avait $\langle u \rangle_{O.P.} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ soit $\langle u \rangle_{O.S.} = 2 \langle u \rangle_{O.P.}$ qui se comprend puisque l'onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives de même amplitude.

Remarque : En réalité, en écrivant $u = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}_i + \vec{E}_r)^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B}_i + \vec{B}_r)^2$, il vient

$$u = u_i + u_r + \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{E}_r + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_r \text{ avec } \vec{B}_i \cdot \vec{B}_r = -\frac{\vec{E}_i \cdot \vec{E}_r}{c^2} \text{ d'où}$$

$u = u_i + u_r$. Le résultat est donc vrai en valeur instantanée (et non seulement en valeur moyenne). Ce résultat n'est pas général car l'énergie est une grandeur quadratique et non linéaire.

b) Le vecteur de Poynting est $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kz \cos kz \sin \omega t \cos \omega t \vec{u}_z$
 ou encore $\vec{R}(z, t) = \epsilon_0 c E_0^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \vec{u}_z$

C'est une fonction de fréquence 2ω , c'est-à-dire nulle aussi bien aux nœuds qu'aux ventres de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$. La quadrature temporelle des champs assurent ainsi

$$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$$

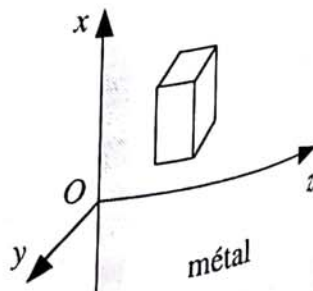
ce qui se comprend puisque deux ondes progressives de même amplitude et se propageant en sens opposé véhiculent des puissances par unité de surface en moyenne égales en module mais dans des sens opposés ; globalement l'énergie ne se propage plus.

Remarque 1 : En réalité, en écrivant $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_i + \vec{E}_r) \wedge (\vec{B}_i + \vec{B}_r)$, il vient
 $\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r + \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r + \vec{E}_r \wedge \vec{B}_i)$ avec $\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r = -\frac{1}{c} (\vec{E}_i \cdot \vec{E}_r) \vec{u}_z = -\vec{E}_r \wedge \vec{B}_i$,
 d'où $\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r$; ici encore le terme "d'interférences" entre les deux ondes est nul et ceci en valeur instantanée, mais attention $\vec{R}_i \neq -\vec{R}_r$, on a seulement $\langle \vec{R}_i \rangle = -\langle \vec{R}_r \rangle$ soit $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$.

Remarque 2 : Si l'onde incidente est polarisée circulaire droite, alors l'onde réfléchie est polarisée circulaire gauche et l'onde stationnaire résultante est telle que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ce qui conduit à $\vec{R} = \vec{0}$ et $u = \text{Cste}$ (voir exercice 3.2).

5.a) L'exercice 3.8 montre que même dans un très bon conducteur, l'onde pénètre faiblement dans le métal mais avec des champs et des courants volumiques qui s'atténuent très rapidement en fonction de z . Il s'agit de déterminer l'action de ces champs sur ces courants.

Considérons dans le métal un élément de volume $d\tau = dS dz$ avec $dS = dx dy$. La force s'exerçant dessus est $d^2 \vec{f} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$, où $\vec{B}$ et $\vec{j}$, champ et courant volumique dans le conducteur sont reliés par l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ où le courant de déplacement est négligé devant le courant de conduction (voir exercice 3.8 § 1b).



$\vec{B}$ et $\vec{j}$ s'écrivent ici (indépendamment du temps) $\vec{B} = B(z)\vec{u}_y$ et $\vec{j} = j(z)\vec{u}_x$
 d'où $\mu_0 j(z) = -\frac{dB(z)}{dz}$ et $d^2\vec{f} = j(z)B(z)d\tau\vec{u}_z = -\frac{1}{\mu_0}B(z)\frac{dB(z)}{dz}dzdS\vec{u}_z$

Intégrée sur toute l'épaisseur du métal sachant que $B(\infty) = 0$ (en fait déjà pour quelques épaisseurs de peau) la force devient

$$d\vec{f} = -\frac{dS\vec{u}_z}{\mu_0} \int_0^\infty B(z)dB(z) = +\frac{B^2(z=0)}{2\mu_0}dS\vec{u}_z$$

Puisque les caractéristiques du conducteur n'interviennent pas explicitement, nous admettons que cette expression reste vraie pour le conducteur parfait où le courant surfacique est d'après 2c)

$$\vec{j}_S = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(z=0) \wedge \vec{u}_z \text{ soit}$$

$$d\vec{f} = \vec{j}_S dS \wedge \frac{\vec{B}(z=0)}{2}$$

$d\vec{f}$ est une force normale au conducteur et dirigée vers l'intérieur de celui-ci (force pressante).

- b) Par unité de surface, il y correspond une pression $P = \frac{|d\vec{f}|}{dS} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t$ de valeur moyenne

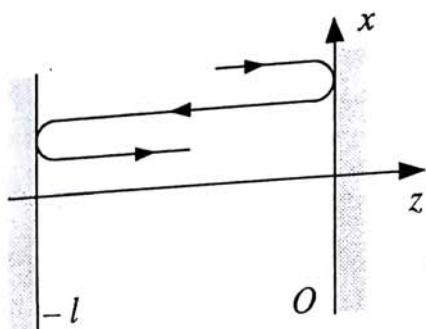
$$\langle P \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

égale à la densité d'énergie $\langle u \rangle$ et appelée pression de radiation.

Citons parmi les applications

- les voiles solaires : le rayonnement solaire exerce sur des voiles dépliées dans l'espace une force répulsive en $1/r^2$ (car pour une onde sphérique, le champ électrique est en $1/r$) et qui varie donc comme l'attraction gravitationnelle. Il suffit de la prendre légère et de grande surface pour effectuer de la "navigation solaire" (voir exercice 1.5).
- l'orientation de la queue des comètes : lorsqu'une comète s'approche du soleil, les particules qui constituent la queue subissent la pression de radiation et la queue s'oriente au cours du mouvement de façon à être alignée vers l'extérieur sur la droite Soleil-tête de la comète.
- les expériences de lévitation : on peut soulever et maintenir en équilibre un petit objet réfléchissant dans un faisceau laser puissant orienté verticalement vers le haut (voir exercice 1.4).

6.



La réflexion en $z = 0$ avec la condition aux limites $\vec{E}(z = 0) = \vec{0}$ a conduit à la structure d'onde stationnaire

$$\vec{E}(z, t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t \vec{u}_x$$

A présent, il faut aussi que $\vec{E}(z = -l) = \vec{0}$, $\forall t$, c'est-à-dire que le second conducteur soit positionné en un nœud de $\vec{E}$.

$$\sin kl = 0 \Rightarrow (kl)_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- si l est imposée, alors $k = k_n$ est quantifié par $k_n = n\pi/l$. Ne conviennent qu'une suite de valeurs discrètes de la fréquence

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{k_n \cdot c}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}$$

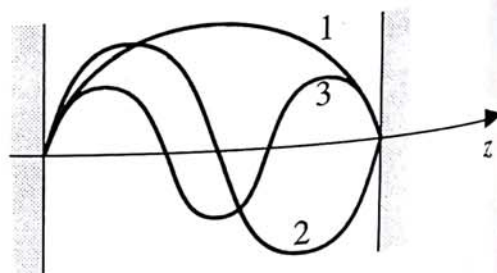
- si λ est imposée, alors $k = 2\pi/\lambda$ l'est et c'est donc $l = l_n$ qui est quantifiée par

$$l_n = \frac{n\pi}{k} \Rightarrow$$

$$l_n = n \frac{\lambda}{2}$$

On parle dans ce cas de modes propres comme pour une corde vibrante fixée aux deux extrémités (voir O.M. exercice 1.1).

Le schéma ci-contre représente les variations de l'amplitude du champ électrique pour les trois premiers modes.



- b) Si la condition n'est pas réalisée, le champ se réfléchit à chaque aller-retour avec une distribution de phase dont la répartition totale est considérée comme aléatoire. La résultante en champ est alors nulle. Lorsque la condition est réalisée les interférences (superposition de n ondes cohérentes) deviennent constructives et l'onde stationnaire peut exister. Comme l'apport d'énergie est continu et qu'il n'y a pas de pertes, l'intensité devient infinie pour ces fréquences alors qu'elle est nulle par ailleurs, d'où le terme d'ondes stationnaires résonnantes (comme pour un circuit RLC avec $R = 0$). En réalité les pertes par effet Joule dans des conducteurs nécessairement imparfaits amènent toujours à des facteurs de qualité finis pour ces cavités résonnantes (voir exercice 3.9).