

3.2 Réflexion normale d'une OPPM (pol. ellipt.)

Question préliminaire : Une OPPM de pulsation ω se propage dans le vide dans le sens des z croissants. En notation complexe, son champ électrique est :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ réel } \geq 0$$

Précisez l'état de polarisation de cette onde en distinguant suivant les valeurs de α . Comment ces résultats sont-ils modifiés si :

- en conservant la convention $e^{i(\omega t - kz)}$, α devient réel ≤ 0 ?
- en conservant α réel ≥ 0 , la convention devient $e^{-i(\omega t - kz)} = e^{i(kz - \omega t)}$?

Cet exercice étudie la réflexion, sous incidence normale, d'une onde de polarisation quelconque sur un conducteur plan parfait.

L'onde incidente a pour champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ réel de signe indéterminé.}$$

Le conducteur parfait occupe la partie de l'espace correspondant à $z > 0$, sa surface correspond avec le plan xOy .

- a) Donner l'expression du champ $\underline{\vec{E}}_r$ de l'onde réfléchie. Comparer la polarisation des ondes incidente et réfléchie et expliquer qualitativement ce résultat.
En déduire le champ $\underline{\vec{E}}$ de l'onde résultante.
- b) Déterminer les champs magnétiques $\underline{\vec{B}}_i$ et $\underline{\vec{B}}_r$, puis le champ $\underline{\vec{B}}$ total.
Que peut-on dire de $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ pour $\alpha = 1$?
- c) Calculer la valeur instantanée du vecteur de Poynting $\vec{R}$. Pour quel état de polarisation est-il nul $\forall z$ et $\forall t$? Quelle est sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$?
- d) Déterminer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de la densité d'énergie électromagnétique.
Commentaires.
- e) Quelles sont les densités superficielles de charge σ et de courant $\vec{j}_s$ à la surface du conducteur ?

QP : en notation réelle, $\vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} \cos \Phi \\ -\alpha \sin \Phi \\ 0 \end{vmatrix}$ avec $\Phi = \omega t - kz$.

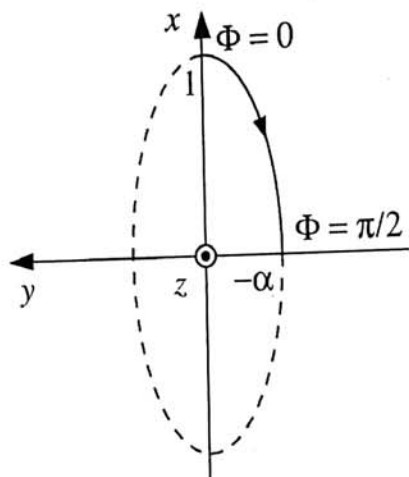
Bien sûr, cela correspond, en général, à une polarisation elliptique puisque $E_x^2 + E_y^2 / \alpha^2 = 1$, d'axe Ox et Oy .

Le sens de parcours est obtenu de la manière suivante : il s'agit d'observer dans le sens de la provenance de l'onde, à z fixé, le sens d'évolution au cours du temps, de l'extrémité du vecteur $\vec{E}$.

A z fixé, au cours du temps, Φ augmente ; il suffit de faire deux observations à un quart de période d'intervalle :

à $\Phi = 0$, la direction de $\vec{E}$ est donnée par $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et à $\Phi = \pi/2$, par $\begin{vmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

La polarisation est donc ici droite (sens des aiguilles d'une montre).



$\alpha = 0$: polarisation rectiligne d'axe Ox
 $0 < \alpha < 1$: polarisation elliptique droite de grand axe Ox (cas du dessin)
 $\alpha = 1$: polarisation circulaire droite
 $\alpha > 1$: polarisation elliptique droite de grand axe Oy .

- pour Φ inchangé et $\alpha < 0$, la polarisation est gauche.
- dans la convention $e^{i(kz - \omega t)}$, poser $\Phi' = kz - \omega t$, et donc à z fixé, au cours du temps, Φ' diminue (prendre $\Phi' = 0$ et $\Phi' = -\pi/2$) ; pour $\alpha > 0$, la polarisation est gauche.

a) $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ le signe de α détermine le sens de la polarisation elliptique.

La condition de continuité sur le conducteur parfait $\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{0}$, $\forall t$ détermine le champ de l'onde réfléchie

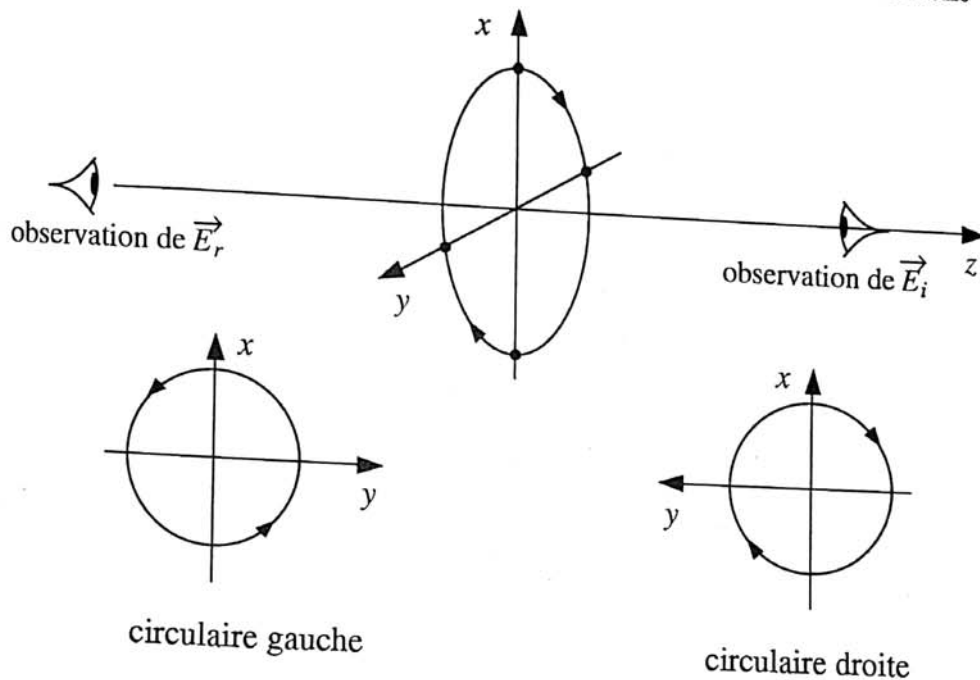
$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où le champ résultant : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \Rightarrow$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin kze^{i\omega t} \begin{vmatrix} -i \\ \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

En supposant $\alpha > 0$, si l'onde incidente est de polarisation elliptique droite, l'onde réfléchie est de polarisation elliptique... gauche.

Ce changement de sens n'est dû, ni à la phase (puisque la convention $e^{i\omega t}$ est la même), ni au signe de α (également inchangé), mais tout simplement au sens dans lequel doivent être faites les observations. L'observateur doit toujours voir venir l'onde ; il analyse donc $\vec{E}_i$ en regardant vers Oz^- et $\vec{E}_r$ en regardant vers Oz^+ . Or d'après la condition de passage $\vec{E}_r(z=0) = -\vec{E}_i(z=0)$, les deux champs étant à tout instant antiparallèles tournent donc dans l'absolu dans le même sens ; c'est donc la "convention d'observation" qui introduit ce "renversement factice".



$$b) \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} -i\alpha \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{de même } \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \begin{vmatrix} -i\alpha \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où le champ résultant : $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos kz \cdot e^{i\omega t} \begin{vmatrix} -i\alpha \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il apparaît que pour $\alpha = 1$ (cas de la polarisation circulaire droite), les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles (et vibrent en phase) ; ceci est une curiosité, mais pas une aberration car l'onde résultante est stationnaire (et non progressive). Pour $\alpha = -1$ (circulaire gauche), ils sont de sens opposés.

$$c) \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kz \cos kz \begin{vmatrix} \sin \omega t & \alpha \sin \omega t \\ \alpha \cos \omega t & \cos \omega t \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$\vec{R}(z, t) = \epsilon_0 c (1 - \alpha^2) E_0^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \vec{u}_z$$

Les seuls cas de polarisation où l'énergie ne se propage plus de manière instantanée correspondent à $\alpha = \pm 1$, c'est-à-dire aux polarisations circulaires, ce qui est conforme à $\vec{E} \parallel \vec{B}$ dans ce cas.

En valeur moyenne, puisque $\langle \sin 2\omega t \rangle = 0$,

$$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$$

En moyenne, le flux total d'énergie est nul quel que soit l'état de polarisation (puisque en moyenne, il se propage autant d'énergie dans un sens que dans l'autre).

Remarque : Pour obtenir directement $\langle \vec{R} \rangle$ à partir des champs complexes, écrire

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = 0 \quad \text{car} \quad \vec{E} \wedge \vec{B}^* \text{ est imaginaire pur.}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } u &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2 \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz \cdot (1 + \alpha^2) + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kz \cdot (\alpha^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\langle u \rangle = (1 + \alpha^2) \epsilon_0 E_0^2$$

- cette moyenne temporelle est indépendante de z .
- le cas de la polarisation rectiligne ($\alpha = 0$) redonne $\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2$ (voir ex. 3.1)

e) $\vec{E}$ n'a pas de composante normale d'où

$$\sigma = 0$$

La composante tangentielle de $\vec{B}$ est discontinue en $z = 0$:

$$\vec{0} - \vec{B}(z = 0) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$$

Cherchons a priori $\vec{j}_S$ sous la forme $\vec{j}_S = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ (car dans le plan xOy)

Le calcul est facile :

$$\vec{j}_S = 2\epsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$