

Corrigé : Diffraction de FRAUNHOFER

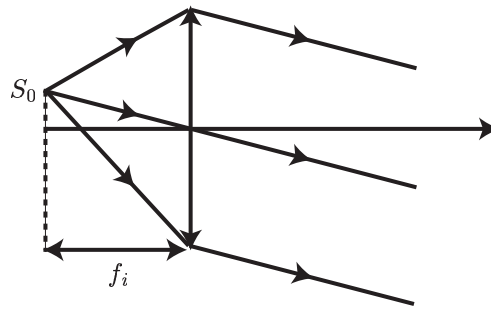
1.

1.1. Une onde électromagnétique quasi-plane est une onde localement plane c'est à dire dont la direction est localement constante.

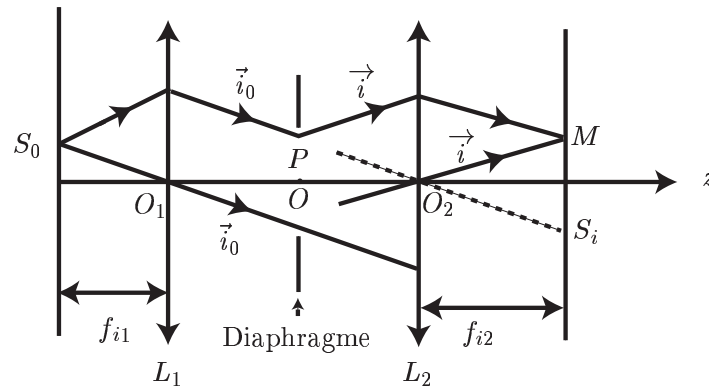
Réalisation :

★ Se placer loin d'une source lumineuse.

★ ou mettre la source S_0 dans le plan focal objet d'une lentille convergente :



1.2.



1.3. Contribution de HUYGENS : chaque point P d'une surface d'onde se comporte comme une source secondaire fictive, émettant des ondelettes sphériques dont l'amplitude en un point M est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à l'élément de surface $d\Sigma(P)$.

Contribution de FRESNEL : ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

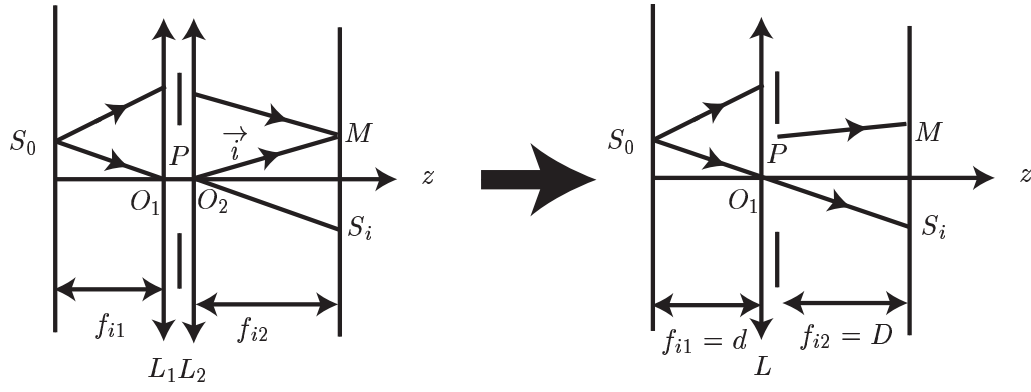
1.4.

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x, y) \exp \left[j(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{OP} \right] d\Sigma(P)$$

avec : $\underline{A}_0$ une constante de proportionnalité, $\underline{t}(x, y)$ le coefficient de transmission de l'ouverture appelé **transmittance pupillaire**, $\vec{k}_0$ et $\vec{k}$ sont respectivement les vecteurs d'onde de l'onde incidente sur l'ouverture et l'onde diffractée.

1.5. La distance entre L_1 et L_2 n'intervient pas dans le calcul de l'amplitude complexe $\underline{A}(M)$, on peut donc les accoler et les remplacer par une seule lentille équivalente L :

La diffraction de FRAUNHOFER est donc aussi la diffraction observée dans le plan où il y a l'image S_i de la source S_0 par une seule lentille.



1.6.

1.6.1. On a :

$$\begin{aligned}\underline{A}(M) &= \underline{A}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x, y) \exp \left[j(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{OP} \right] d\Sigma(P) \\ &= \underline{A}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(x, y) \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{i}_0 - \vec{i}) \cdot \vec{OP} \right] d\Sigma(P)\end{aligned}$$

Soient $(x, y, 0)$ les coordonnées du point P et $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ les coefficients directeurs du vecteur unitaire $\vec{i}_0$ de l'onde incidente :

$$\vec{i}_0 = \alpha_0 \vec{e}_x + \beta_0 \vec{e}_y + \gamma_0 \vec{e}_z$$

de même (α, β, γ) les coefficients directeurs du vecteur unitaire $\vec{i}$ de l'onde diffractée :

$$\vec{i} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$$

d'où :

$$\begin{aligned}\underline{A}(M) &= \underline{A}_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) x \right] dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (\beta - \beta_0) y \right] dy \\ &= \underline{A}_0 ab \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) a \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\lambda} (\beta - \beta_0) b \right]\end{aligned}$$

1.6.2. On a :

$$\vec{i}_0 = \alpha_0 \vec{e}_x + \beta_0 \vec{e}_y + \gamma_0 \vec{e}_z = \frac{\vec{S_0 O_1}}{S O_1}$$

or dans les conditions de GAUSS $S_0 O_1 \simeq f_i$, donc :

$$\vec{S_0 O_1} \simeq -\frac{x_0}{f_i} \vec{e}_x - \frac{y_0}{f_i} \vec{e}_y + \vec{e}_z$$

d'où :

$$\alpha_0 \simeq -\frac{x_0}{f_i} \quad , \quad \beta_0 \simeq -\frac{y_0}{f_i} \quad \text{et} \quad \gamma_0 \simeq 1$$

de même :

$$\vec{i} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z = \frac{\vec{O_2 M}}{O_2 M} \simeq \frac{\vec{O_2 M}}{f_i}$$

donne :

$$\alpha \simeq \frac{X}{f_i} \quad , \quad \beta \simeq \frac{Y}{f_i} \quad \text{et} \quad \gamma \simeq 1$$

par conséquent :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_0 ab \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (X + x_0) a \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (Y + y_0) b \right]$$

Remarque : l'amplitude complexe maximale correspond au maximum principal de la figure de diffraction, qui est donc centré en $X = -x_0$ et $Y = -y_0$ c'est à dire centré sur l'image géométrique de la source S_0 par L_1 et L_2 .

2.

2.1. L'amplitude complexe de l'onde diffractée par une fente rectangulaire est :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_0 ab \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (X + x_0) a \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (Y + y_0) b \right]$$

Pour une fente fine de largeur a et donc de longueur $b \gg a$ et λ :

$$\operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (Y + y_0) b \right] = 0 \text{ partout sauf en } Y = -y_0 \text{ où } \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (Y + y_0) b \right] = 1.$$

d'où l'amplitude complexe diffractée par la fente fine est nulle partout sauf en $Y = -y_0$ où :

$$\underline{A}(M) = \underline{A}_0 ab \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (X + x_0) a \right]$$

L'intensité lumineuse est donc :

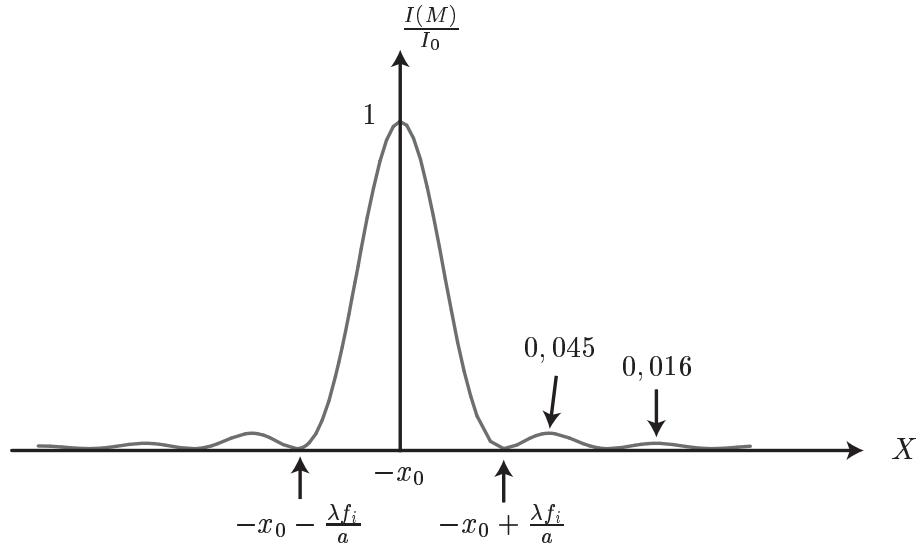
$$I(M) = B \underline{A}(M) \cdot \underline{A}^*(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (X + x_0) a \right] \text{ si } Y = -y_0$$

avec B une constante de proportionnalité et $I_0 = B |\underline{A}_0|^2 a^2 b^2$.

Remarque : On peut calculer directement l'amplitude complexe diffractée par une fente fine transparente de largeur a et de longueur $b \gg a, \lambda$:

$$\begin{aligned} \underline{A}(M) &= \underline{A}_0 b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha_0 - \alpha) dx \\ &= \underline{A}_0 ab \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi f_i}{\lambda} (X + x_0) a \right] \end{aligned}$$

2.2.



2.3

$$\Delta X = 2 \frac{\lambda f_i}{a} \simeq 1,1 \text{ mm}$$

2.4.

a. la figure de diffraction reste inchangée.

b. La fente fine et la figure de diffraction tournent dans le même sens avec le même angle, puisque, dans le cas d'une source ponctuelle, celle-ci est répartie perpendiculairement à la fente.

2.5. Chaque étoile donne son propre système de diffraction centré en son image par le telescope. d'où :

$$d_0 = \varphi f_i$$

2.6.

$$\delta = \frac{\lambda}{a}$$

2.7.

2.7.1.

$$\delta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \simeq 2,44.10^{-7} \text{ rad}$$

$$d_{min} = \delta.d_{\text{terre-etoile}} \simeq 9,7.10^9 \text{ m}$$

2.7.2. pour collecter le maximum de lumière.

2.8. On a :

$$\alpha_0 = \vec{i}_0 \cdot \vec{e}_x = \sin \theta_0 \text{ et } \alpha = \vec{i} \cdot \vec{e}_x = \sin \theta$$

donc l'amplitude complexe diffractée par une fente fine apodisée de largeur a et de longueur $b \gg a, \lambda$ est :

$$\underline{A}'(M) = \underline{A}_0 b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{\pi x}{a} \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta) x \right] dx$$

or :

$$\cos \frac{\pi x}{a} = \frac{\exp \left(j \frac{\pi x}{a} \right) + \exp \left(-j \frac{\pi x}{a} \right)}{2}$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$\underline{A}'(M) = \underline{A}_0 \frac{\pi}{2} ab \frac{\cos m}{\frac{\pi^2}{4} - m^2}$$

avec $m = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$.

d'où :

$$I'(M) = I'_0 \frac{\cos^2 m}{\left(\frac{\pi^2}{4} - m^2 \right)^2}$$

avec $I'_0 = B|\underline{A}_0|^2 \frac{\pi^2}{4} a^2 b^2 = I_0 \frac{\pi^2}{4}$ avec I_0 intensité maximale dans le cas d'une fente fine **transparente** de largeur a et de longueur $b \gg a, \lambda$.

2.9 Représentation de $I'(M)$ en fonction de m :

$$I'(M) = I_0 \frac{\pi^2}{4} \frac{\cos^2 m}{\left(\frac{\pi^2}{4} - m^2 \right)^2}$$

$I'(M)$ admet un maximum principal pour $m = 0$:

$$I'_{max} = I_0 \frac{4}{\pi^2} \simeq 0,4 I_0$$

$I'(M) = 0$ pour $\cos m = 0$ et $m \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ c'est à dire pour $m = \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}$ etc.

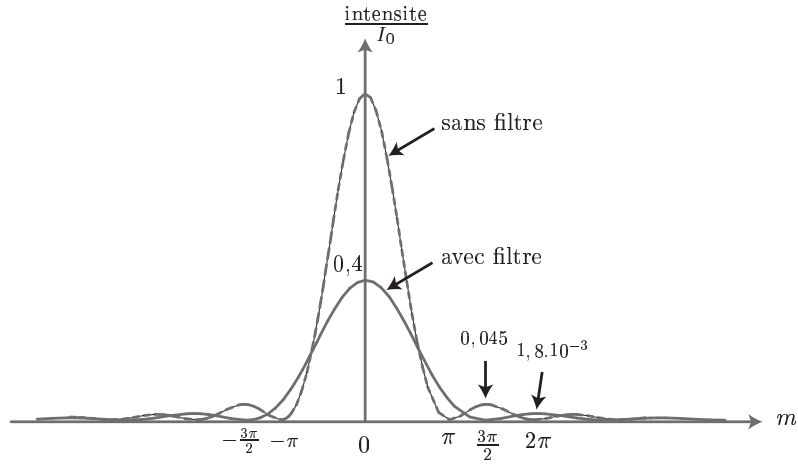
$I'(M)$ admet des maximums secondaires pour $m = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc.

Avec le filtre, l'intensité du premier maximum secondaire ($1,8.10^{-3} I_0$) est pratiquement nulle. Il ne peut donc cacher le maximum principal dû à l'étoile de faible intensité. Contrairement au cas où la fente est sans filtre.

3.

3.1.

$$\underline{A}_1(M) = \underline{A}_0 b \int_{-\frac{h}{2} - \frac{a}{2}}^{-\frac{h}{2} + \frac{a}{2}} \exp \left[\frac{j2\pi}{\lambda} (\alpha_0 - \alpha) x \right] dx + \underline{A}_0 b \int_{\frac{h}{2} - \frac{a}{2}}^{\frac{h}{2} + \frac{a}{2}} \exp \left[\frac{j2\pi}{\lambda} (\alpha_0 - \alpha) x \right] dx$$



Tout calcul fait, on trouve :

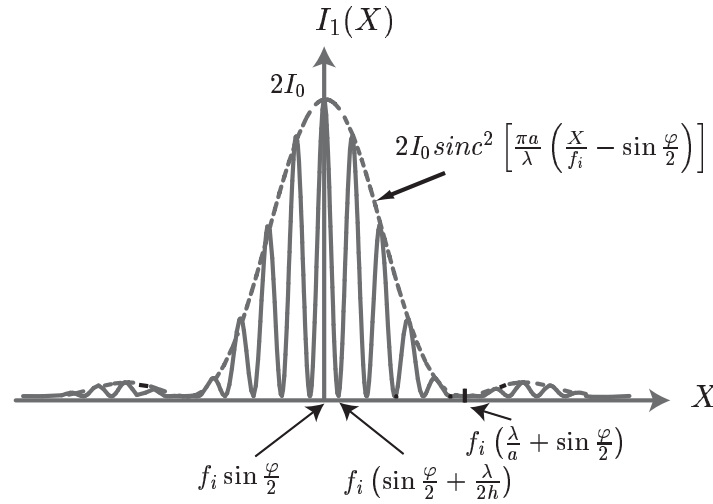
$$\underline{A}_1(M) = 2\underline{A}_0 ab \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) a \right] \cos \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) h \right]$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_1(M) &= B \underline{A}_1(M) \underline{A}_1^*(M) \\ &= 4B |\underline{A}_0|^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) a \right] \cos^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) h \right] \\ &= I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi h}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

avec $I_0 = 2B |\underline{A}_0|^2 a^2 b^2$.

3.2. Tracé :



3.3. En lumière monochromatique, on observe une figure d'interférence centrée sur l'image géométrique de l'étoile E_1 par L et modulé par une tâche de diffraction.

En lumière blanche, on observe une superposition de systèmes d'interférence dûs à chaque longueur d'onde.

3.4. Il suffit de remplacer φ par $-\varphi$, d'où :

$$I_2(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi h}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right)$$

3.5. Comme E_1 et E_2 sont indépendantes, elles émettent des trains d'ondes aléatoires qui ne peuvent pas interférer, donc :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

3.6. On a $a \rightarrow 0$ et $\varphi \ll 1$, donc :

$$\text{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sin \frac{\varphi}{2} \simeq \frac{\varphi}{2}$$

d'où :

$$I(M) = I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi h}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right) + I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi h}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right)$$

or :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

d'où :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{\pi h \varphi}{2} \cos \frac{2\pi X h}{\lambda f_i} \right)$$

donc :

$$I_{max} = 2I_0 \left(1 + \left| \cos \frac{\pi h \varphi}{2} \right| \right) \quad \text{et} \quad I_{min} = 2I_0 \left(1 - \left| \cos \frac{\pi h \varphi}{2} \right| \right)$$

d'où le contraste est :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left| \cos \frac{\pi h \varphi}{2} \right|$$

$\mathcal{C} = 0$ pour la première fois pour :

$$\varphi = \frac{\lambda}{2e} \simeq 6,8.10^{-7} \text{ rad}$$