

Problème : Diffraction de FRAUNHOFER

On s'intéresse dans ce problème à la diffraction de FRAUNHOFER à travers une puis deux fentes, d'une onde quasi-plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ (sauf pour la question **3.3.**) .

1. Application du principe de HUYGENS-FRESNEL

1.1. Qu'appelle-t-on une onde électromagnétique quasi-plane ? Comment peut-on la réaliser expérimentalement.

1.2. Donner le schéma du dispositif expérimental à deux lentilles permettant l'observation du phénomène de la diffraction de FRAUNHOFER.

1.3. Énoncer le principe de HUYGENS-FRESNEL.

1.4. Donner l'expression de l'amplitude complexe de l'onde diffractée, par une ouverture plane, en un point M situé à l'infini.

1.5. En s'inspirant de la question **1.2.**, montrer qualitativement que l'on observe la figure de diffraction de FRAUNHOFER dans le plan conjugué de la source ponctuelle par une seule lentille.

1.6. On suppose que l'ouverture diffractante est une fente rectangulaire parfaitement transparente de largeur a selon Ox et de longueur b selon Oy :

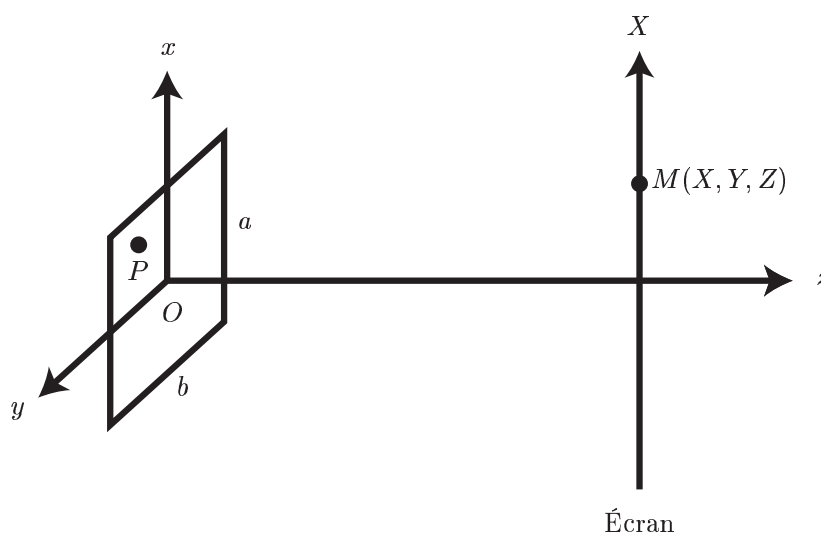


FIG. 9.1 – Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire

1.6.1. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}(M)$ de l'onde diffractée par la fente rectangulaire en un point M situé à l'infini.

1.6.2 On suppose que les deux lentilles de la question **1.2.** sont identiques et f_i leur distance focale image commune. Donner l'expression de $\underline{A}(M)$, dans l'approximation de GAUSS, en fonction de f_i et des coordonnées (x_0, y_0, z_0) et (X, Y, Z) respectivement de la source ponctuelle S et M .

2. Pouvoir séparateur d'un télescope

On considère maintenant le cas d'une fente fine de largeur a selon Ox .

2.1. Dédire de ce qui précède, l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ de l'onde diffractée au point M .

2.2. Tracer $I(X)$ en fonction de X coordonnée du point M sur l'axe Ox . Comparer l'intensité du maximum principal à celle du 1^{er} maximum secondaire.

2.3. Donner la largeur de la tâche centrale en fonction de f_i , λ et a .

Application numérique : $f_i = 1$ m, $\lambda = 0,546$ μm et $a = 1$ mm.

2.4. Que se passe-t-il si l'on fait subir à la fente diffractante :

2.4.1. une translation dans son propre plan.

2.4.2. une rotation dans son propre plan.

Modélisation d'un télescope

Le télescope utilisé pour les observations astronomiques peut être modélisé par une fente fine de largeur a , devant laquelle se trouve une lentille convergente L de distance focale image f_i (**FIG. 2**). L'observation des objets lointains se fait dans le plan focale image de la lentille.

On définit le pouvoir séparateur δ du télescope comme la plus petite valeur de la distance angulaire correspondant à l'observation de deux images distinctes. À cause de la diffraction, on ne verra qu'une seule tâche lumineuse si la distance angulaire entre deux étoiles est inférieure à δ .

On observe à l'aide de ce télescope une étoile double dont les deux composantes E_1 et E_2 émettent des ondes supposés planes, de même intensité et de même longueur d'onde. On désigne par φ l'angle sous lequel on voit deux étoiles depuis le télescope.

2.5. On suppose que le télescope est orienté de façon que les deux étoiles soient symétriques par rapport à l'axe optique Oz (**FIG.2**) :

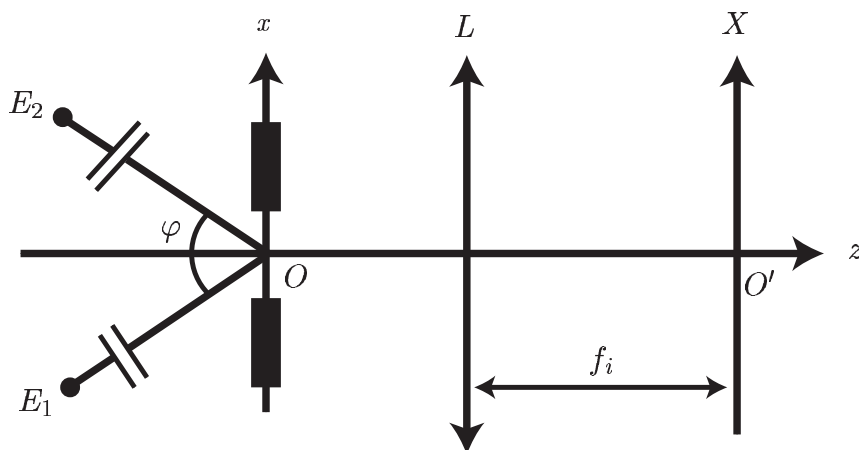


FIG. 9.2 – Modélisation d'un télescope

Donner en fonction de f_i et φ (supposé faible), l'expression de la distance d_0 séparant les deux maximums principaux observés dans la plan focale image de la lentille.

2.6. En adoptant le critère de **RAYLEIGH*** et en utilisant le résultat de la question 2.3., exprimer le pouvoir séparateur δ du télescope en fonction de λ et a .

***Critère de RAYLEIGH** : deux tâches de diffraction peuvent être séparées si le maximum principal de l'une est confondu avec le premier minimum nul de l'autre.

Le télescope réel

En réalité, le collecteur de la lumière pour un télescope est un miroir concave de diamètre D . C'est ce miroir qui limite le front d'onde et joue le rôle d'une ouverture diffractante. Le pouvoir séparateur (en radian) est donnée par la formule suivante $\delta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

2.7.

2.7.1. Calculer le pouvoir séparateur du télescope spatial HUBBLE sachant que le diamètre du miroir collecteur est $D = 2,4$ m et qu'il opère à une longueur d'onde $\lambda = 480$ nm.

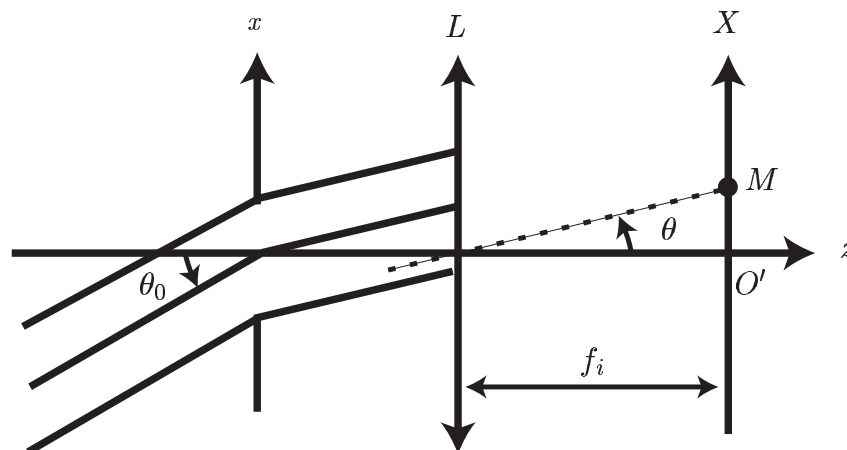
En déduire la distance minimale entre deux étoiles situées à 4,2 années de lumière de la terre pour qu'elles puisse être séparées par HUBBLE. On donne une année de lumière : 1 a.l = $9,5 \cdot 10^{15}$ m.

2.7.2. Le pouvoir séparateur d'un télescope opérant dans le visible à la surface de la terre est limité à environ une seconde d'arc à cause des turbulences de l'atmosphérique. Cette valeur correspond à un miroir d'environ 10 cm de diamètre. Pourquoi utilise-t-on alors des télescopes de grands diamètres (3 à 10 m) pour observer le ciel dans le visible ?

Apodisation

La fente fine de largeur a décrite dans le paragraphe 2. porte maintenant un filtre de coefficient de transmission en amplitude $t(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

Elle est éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ arrivant sous incidence θ_0 .



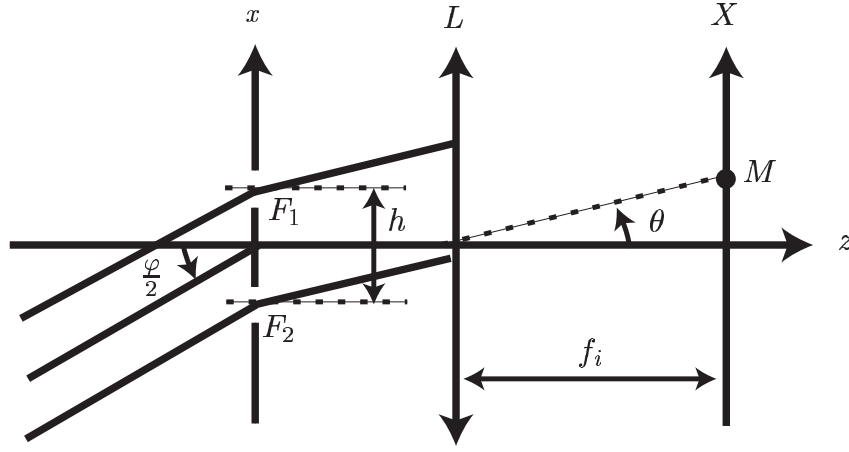
2.8. En posant $m = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0)$, donner l'intensité lumineuse $I'(m)$ de l'onde diffractée dans la direction faisant l'angle θ avec l'axe Oz

2.9. Représenter sur un même graphique la courbe $I'(m)$ et $I(m)$ obtenue respectivement avec ou sans filtre.

Expliquer pourquoi l'ajout d'un tel filtre permet de distinguer deux étoiles très voisines, d'intensités très différentes et non résolues avec une fente parfaitement transparente (sans filtre).

3. Fentes d'YOUNG

On considère une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ provenant de l'étoile E_1 repéré par l'angle $\frac{\varphi}{2}$ éclairant un diaphragme percé de deux fentes F_1 et F_2 de même largeur a et distantes de h .



3.1. Montrer que l'intensité en un point M du plan focale image de la lentille convergente L peut se mettre sous la forme :

$$I_1(X) = I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi h}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{f_i} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

3.2. Tracer l'allure de $I_1(X)$ en fonction de X .

3.3. Qu'observe-t-on en lumière monochromatique ? en lumière blanche ?

3.4. La direction de l'étoile E_2 fait un angle $-\frac{\varphi}{2}$ avec l'axe Oz . Donner la contribution de l'étoile E_2 en intensité $I_2(X)$ dans le plan focal image de la lentille.

3.5. Expliquer pourquoi observe-t-on sur l'écran la somme des intensités dues à chaque étoile ?

3.6. Dans cette question on suppose $\varphi \ll 1$ et $a \ll h$ (formellement $a \rightarrow 0$).

En faisant varier la distance qui sépare les deux fentes éclairées par les deux étoiles, on constate que l'écran devient totalement brouillé lorsque cette distance atteint la valeur $e = 40$ cm. En déduire l'expression de la distance angulaire entre les deux composantes de l'étoile double.

Application numérique : $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$.