

1. L'amplitude complexe de l'onde diffractée en un point M à l'infini est :

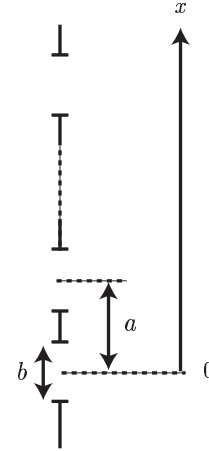
$$\underline{A}(M) = \underline{A}_0 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{na-\frac{b}{2}}^{na+\frac{b}{2}} \exp j \left[\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) x \right] dx$$

or :

$$\vec{i}_0 = \vec{e}_z = \alpha_0 \vec{e}_x + \beta_0 \vec{e}_y + \gamma_0 \vec{e}_z \implies \alpha_0 = 0$$

et

$$\vec{i} = \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z \implies \alpha = \sin \theta$$



donc :

$$\begin{aligned} \underline{A}(M) &= \underline{A}_0 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{na-\frac{b}{2}}^{na+\frac{b}{2}} \exp j \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta x \right] dx \\ &= \underline{A}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \sum_{n=0}^{N-1} \exp j n \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta \end{aligned}$$

or le terme :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp j n \Phi = 1 + \exp j \Phi + \exp j 2\Phi + \dots + \exp j (N-1)\Phi$$

est la somme de N termes d'une progression géométrique de raison $\exp(j\Phi)$ et de premier terme 1, donc :

$$\begin{aligned} \underline{A}(M) &= \underline{A}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \frac{1 - \exp(jN\Phi)}{1 - \exp(j\Phi)} \\ &= \underline{A}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \frac{\exp(jN\frac{\Phi}{2}) \exp(-jN\frac{\Phi}{2}) - \exp(jN\frac{\Phi}{2})}{\exp(j\frac{\Phi}{2}) \exp(-j\frac{\Phi}{2}) - \exp(j\frac{\Phi}{2})} \\ &= \underline{A}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \exp \left[j(N-1)\frac{\Phi}{2} \right] \frac{\sin \left(N\frac{\Phi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\Phi}{2} \right)} \end{aligned}$$

2. l'intensité lumineuse diffractée :

$$\begin{aligned} I(M) &= K \underline{A}(M) \cdot \underline{A}^*(M) \\ &= I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(N \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{N \sin \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right]^2 \\ &= I_0 \left(\frac{\sin w}{w} \right)^2 \left[\frac{\sin(N\gamma w)}{N \sin(\gamma w)} \right]^2 \end{aligned}$$

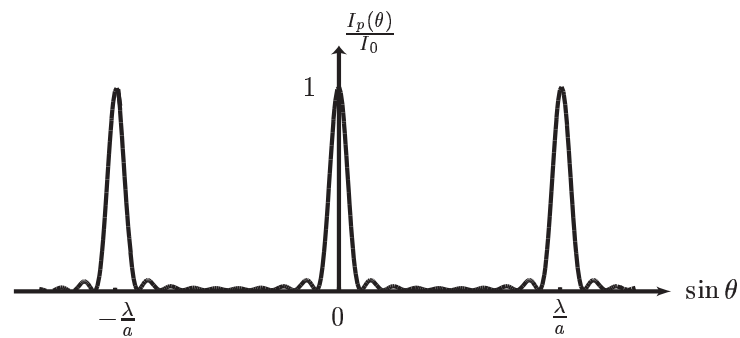
avec :

$$w = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{a}{b}$$

3. Réseau parfait à N fentes fines $b \rightarrow 0$:

$$I_p(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin \left(N \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{N \sin \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right]^2$$

Tracé de $\frac{I_p(\theta)}{I_0}$ en fonction de $\sin \theta$:



4.

4.1. $N = 6$ et $\gamma = \frac{a}{b} = 3 \implies$

$$I(w) = I_0 \cdot \text{sinc}^2(w) \cdot \left[\frac{\sin(18w)}{6 \sin(3w)} \right]^2$$

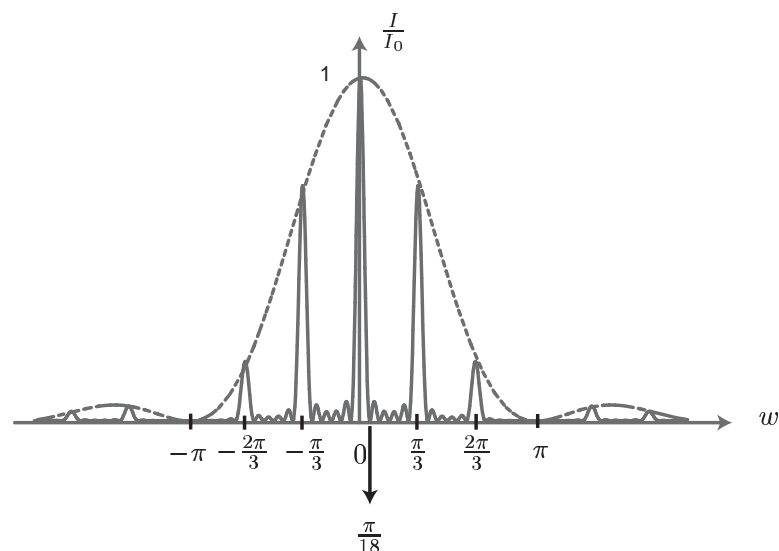
$\text{sinc}^2(w)$ est un terme de diffraction, alors que $\left[\frac{\sin(18w)}{6 \sin(3w)} \right]^2$ est un terme d'interférence.

Les pics d'interférence correspondent à $a \sin \theta = n\lambda$, n entier relatif $\implies \gamma w = 3w = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = n\pi$ c'est à dire $w = \frac{n\pi}{3}$.

Intensités correspondantes aux pics d'interférence :

w	0	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{2\pi}{3}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{4\pi}{3}$	$\pm \frac{5\pi}{3}$
$\frac{I}{I_0}$	1	0,684	0,171	0	0,043	0,027

Pratiquement, on observe cinq raies correspondantes à $w = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}$.



4.2. θ étant faible, $\sin \theta \simeq \theta$.

La largeur angulaire $\Delta \theta$ du maximum principal correspond à :

$$\Delta w \simeq \frac{\pi b \Delta \theta}{\lambda} = 2 \frac{\pi}{18} \implies \Delta \theta \simeq \frac{\lambda}{9b} = 10^{-3} \text{ rad}$$