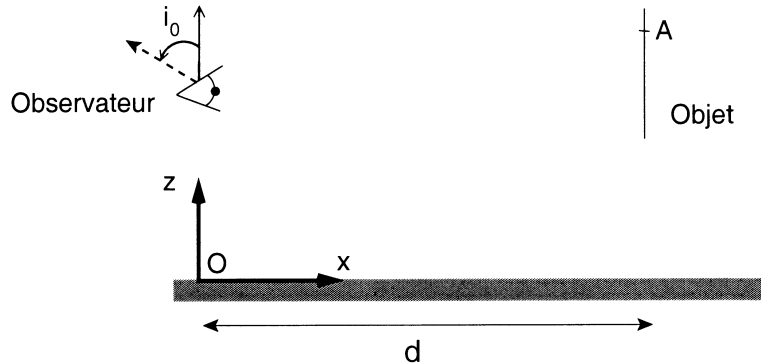


Problème 1

L'observation de mirages dits inférieurs se produit généralement en été lorsque la température de l'air augmente notablement au contact d'un sol chauffé par le soleil. La masse volumique de l'air et l'indice de réfraction de l'air augmente alors avec l'altitude. On étudie dans ce problème la propagation des rayons lumineux dans un tel milieu stratifié horizontalement.

On considère un individu recevant des rayons lumineux d'un objet vertical situé à une distance horizontale d devant lui. Pour repérer la marche des rayons, on utilise un repère Oxz dont l'origine O est situé au sol, au pied de l'observateur. La variable z est l'altitude depuis le sol et x repère la position horizontale. Les coordonnées des yeux de l'observateur sont alors $(x = 0; z = z_0)$ où $z_0 = 1,50$ m. En un point d'un rayon lumineux, on appelle i , l'angle entre l'axe vertical et la tangente au rayon lumineux orientée dans le sens de la propagation, i_0 désignant la valeur de cet angle au niveau de l'observateur ($i_0 > 0$)



1. On admet que le profil d'indice près du sol peut être modélisé par une fonction de la forme

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 + kz} \text{ avec } n_0 = 1,000263$$

Donner l'unité et le signe de k puis tracer l'allure de la courbe $n(z)$.

2. Sous cette hypothèse, on peut montrer que les rayons lumineux entre le

point de l'objet A d'altitude z_A et l'œil de l'observateur suivent une parabole de la forme :

$$z(x) = \frac{k}{4 \sin^2 i_0} x^2 - \frac{x}{\tan i_0} + z_0 \quad (1)$$

Montrer qu'il existe deux valeurs possibles de i_0 , et donc deux paraboles distinctes, si la différence d'altitude $\Delta z = z_A - z_0$ entre le point A et l'observateur vérifie la condition

$$\Delta z > \frac{k d^2}{4} - \frac{1}{k} \quad (2)$$

Dans cette question on pourra poser $\alpha = 1/\tan i_0$.

3. Montrer qu'une augmentation de l'altitude du point A conduit à une augmentation de l'angle i_0 au niveau de l'observateur si une nouvelle condition que l'on exprimera en fonction de k , d et $\tan i_0$ est vérifiée.

4. Démontrer que l'une des paraboles la vérifie et l'autre non.

5. En déduire que l'observateur peut voir deux images d'un objet dont les coordonnées vérifient l'équation (4), l'une droite et l'autre renversée. On pourra illustrer cette propriété sur un schéma. Laquelle de ces images correspond à ce que l'on appelle traditionnellement un mirage optique ou mirage inférieur ?

6. Le 26 avril 1977, les habitants de Grand Haven dans le Michigan, regardant dans la nuit par dessus les eaux froides du Lac Michigan ont observé distinctement dans le ciel, les lumières du phare de Milwaukee situé pourtant à plus de 120 kilomètres. Expliquer brièvement ce phénomène.

Problème 2

1. À la distance r du centre d'un astre de masse M , les effets spécifiques de la théorie de la relativité générale sont de l'ordre de la quantité $u = \frac{2Mc^2}{rc^2}$ où G est la constante de la gravitation universelle et c la vitesse de la lumière dans le vide. Quelle est l'unité de u ?

2. Déterminer les valeurs de u pour les trois astres suivants : la Terre, le Soleil et une étoile à neutrons. On cherchera les valeurs numériques dans la documentation de son choix en citant ses sources. Conclure.

Problème 3

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction en précisant la définition des notions utilisées.

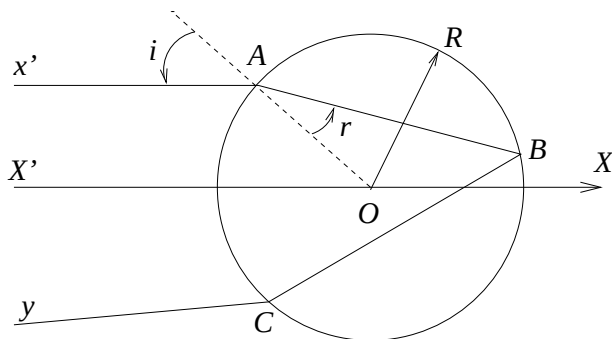
Expliquer le phénomène de réflexion totale.

Calculer l'angle limite de réflexion totale, dans le cas d'un plan de séparation eau-vide, sachant que l'indice de l'eau est $n = 1,333$.

2. On considère une sphère transparente d'indice n , de centre O , de rayon R , baignant dans l'air (d'indice pratiquement égal à 1). Cette sphère est éclairée par un faisceau de lumière parallèle, dont un rayon $x'A$ atteint la sphère en A . En A se produit une réfraction. On choisit pour plan de figure le plan défini par O et $x'A$.

$X'OX$ est l'axe passant par O , de mêmes direction et sens que $x'A$. On choisit un sens positif dans le plan de figure.

Soit B le point où le rayon réfracté en A recoupe la sphère. En C , la lumière peut être soit réfractée, soit réfléchi, mais on ne considérera que le rayon réfracté Cy . On pose $\alpha = (OX', Cy)$.



- (a) Pourquoi le rayon réfracté en A est-il dans le plan de la figure ?
 (b) Peut-il y avoir réflexion totale en B ?
 (c) Montrer que $\alpha = 4r - 2i$.
 (d) Exprimer ensuite α en fonction de i et n uniquement.
3. Étude des variations de α avec i .

- (a) Montrer que l'on peut restreindre cette étude à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 (b) Calculer la dérivée de α par rapport à i .
 (c) Calculer les coordonnées de l'extremum, puis α pour les valeurs suivantes de i : $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}$. La précision demandée est 10^{-2} . On adoptera encore la valeur $n = 1,333$.
 (d) Construire la courbe représentative des variations de α avec i : en ordonnée α , en abscisse i , 1 cm pour 10° sur les deux axes.

Problème 4

Le but de ce problème est d'établir la relation de conjugaison des lentilles minces en utilisant les lois de Descartes.

I- Relation de conjugaison pour le dioptré sphérique

Une lentille sphérique est composée de deux dioptrés sphériques sur lesquels la lumière est réfractée selon les lois de Descartes.

La première partie de ce problème est l'étude du dioptré sphérique.

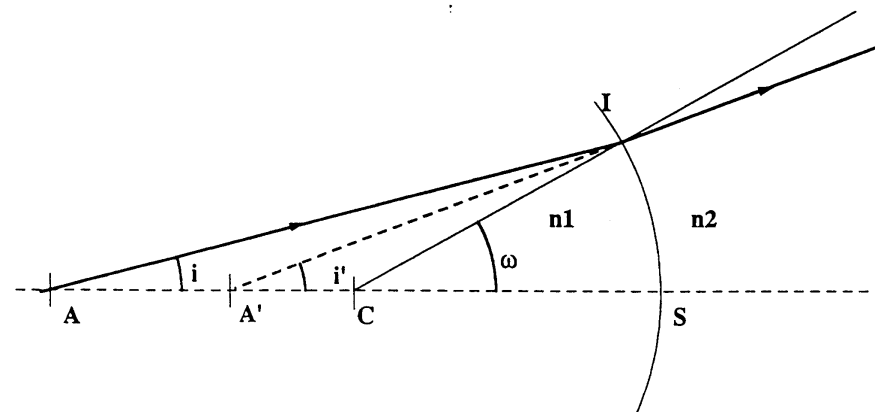


Figure 1

On considère un dioptré sphérique de sommet S , de rayon de courbure $\overline{CS}$ séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 .

Un rayon incident AI vient frapper le dioptré. Il appartient au plan de la figure.

1. Montrer que le rayon réfracté appartient toujours au plan de la figure.

On note A' le point d'intersection du rayon réfracté avec l'axe optique. Les angles sont précisés sur la figure.

2. On appelle i_1 l'angle entre (IA) et (IC) .

Exprimer i_1 en fonction de i et ω .

3. On appelle i_2 l'angle entre (IA') et (IC) .

Exprimer i_2 en fonction de i' et ω .

4. Quelle relation existe-t-il entre i_1 et i_2 ?

Que devient cette relation dans l'approximation des petits angles ?

5. En déduire une relation liant n_1 , n_2 , i , i' et ω .

6. On note H , la projection de I sur l'axe optique. Que valent $\frac{\overline{IH}}{\overline{HA}}$, $\frac{\overline{IH}}{\overline{HA'}}$,
et enfin $\frac{\overline{IH}}{\overline{HC}}$ en fonction de i , i' et ω ?

Que deviennent ces trois relations dans l'approximation des petits angles ? *On admettra qu'alors H est confondu avec S .*

7. Déduire des questions précédentes que :

$$n_1 \left[\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{1}{\overline{SC}} \right] = n_2 \left[\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SC}} \right]$$

8. Que devient cette relation pour un dioptré plan séparant un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 ?

II- Relation de conjugaison pour la lentille plan-convexe

Une lentille est constituée de la succession de deux dioptrés, l'un sphérique l'autre plan. (Figure 2).

Appelons A_1 , l'image d'un objet A sur l'axe optique par le premier dioptré et A' , l'image de A_1 par le second dioptré. A' est l'image de A par la lentille.

1. Cas particulier de la lentille plan-convexe

- a. En utilisant la relation établie au I.7., déterminer la relation liant la position de A_1 à celle de A . On appellera (1) cette relation.

- b. Exprimer de même la relation entre $\overline{P_1 A_1}$ et $\overline{P_1 A'}$. On appellera (2) cette relation.

2. Position des foyers

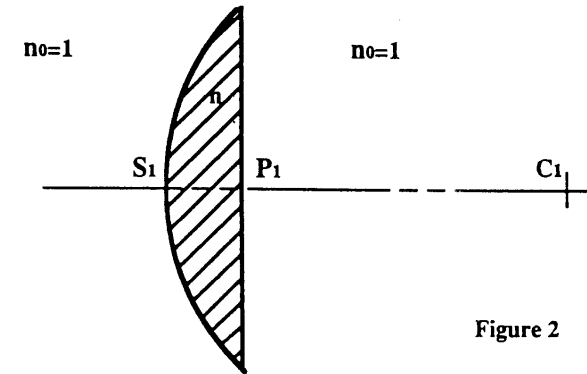


Figure 2

On note F le foyer objet de la lentille ainsi constituée.

L'image B' de F par la lentille est par définition située à l'infini sur l'axe. On note B_1 l'image de F par le premier dioptré.

- a. Montrer que : $\overline{S_1 F} = \frac{\overline{S_1 C_1}}{1 - n}$

- b. De même, on note F' le foyer image de la lentille.

$$\text{Montrer que : } \overline{P_1 F'} = \frac{\overline{P_1 S_1}}{n} + \frac{1}{n-1} \overline{S_1 C_1}.$$

3. Approximation des lentilles minces :

Dans l'approximation des lentilles minces, on suppose que S_1 et P_1 sont confondus en un point O .

- a. Que deviennent les deux relations précédentes ?
b. En déduire que O est donc le milieu de $[FF']$.

4. Relation de conjugaison :

- a. Que deviennent les relations (1) et (2) ?
b. En déduire la relation de conjugaison des lentilles minces.

Commentaires et correction :

Problème 1

Problème extrait du concours ENS BCPST 2008.

Il faut absolument penser à mettre davantage en évidence les résultats des calculs et des raisonnements.

Beaucoup de maladresses dans les démonstrations et les calculs. Les calculs proposés ne demandaient pas de développements excessifs. Montrer qu'une fonction est croissante suppose qu'on calcule la dérivée pour raisonner. Les raisonnements autour de l'équation du second degré n'ont pas été bien maîtrisés.

La correction est à retravailler.

Problème 2

L'exercice a été plutôt bien maîtrisé. Quelques erreurs de calcul qu'on ne devrait pas trouver dans un devoir à la maison.

Les sources des valeurs numériques ont été en général bien citées. J'ai quand même trouver www.google.fr comme source !

Au niveau des commentaires, je n'ai pas trouvé grand chose d'exaltant alors qu'on attendait quelque chose de tout simple.

Problème 3

Pour cet exercice issu de l'épreuve de l'ESIM, actuellement Centrale Marseille, chaque copie devait contenir au minimum une figure pour la loi de la réfraction et une figure pour la goutte d'eau.

Il n'était pas indispensable de travailler ici avec des angles orientés car les figures obtenues avec des angles symétriques par rapport à la normale à la goutte était parfaitement symétriques et conduisaient aux même raisonnement.

Problème 4

Dans cet exercice qui propose une démonstration de la relation de Descartes pour une lentille plan-convexe, chaque copie devait contenir au minimum une figure pour le dioptré sphérique et une figure pour la lentille plan-convexe.

Pas de grosses difficultés dans les calculs qui ont été en général bien abordés.

Problème 1

ENS BCPST 2008

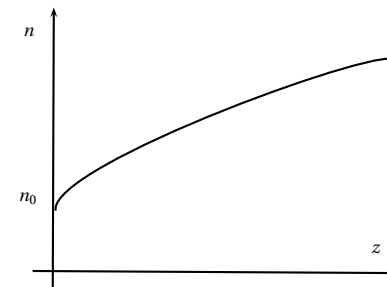
1. k s'exprime en m^{-1} car z est en m et n n'a pas d'unité. On a donc $[k] = \text{L}^{-1}$.

n est une fonction croissante de z donc la dérivée de $n(z)$ doit être une fonction positive. Comme

$$\frac{dn}{dz} = \frac{n_0}{2} \frac{k}{\sqrt{1+kz}}$$

et que $n_0 > 0$, il faut que $k > 0$.

La courbe représentative de $n(z)$ est donnée ci-dessous :



2. La parabole doit passer par $A(d; z_A)$; on en déduit :

$$z_A = \frac{k}{4 \sin^2 i_0} d^2 - \frac{d}{\tan i_0} + z_0 \quad (3)$$

L'inconnue est i_0 . En exploitant l'énoncé, on pose $\alpha = 1/\tan i_0$. On peut alors écrire :

$$\frac{1}{\sin^2 i_0} = 1 + \frac{\cos^2 i_0}{\sin^2 i_0} = 1 + \alpha^2$$

Avec $\Delta z = z_A - z_0$ (3) devient une équation du second degré en α :

$$\frac{k}{4} d^2 \alpha^2 - \alpha d + \frac{k}{4} d^2 - \Delta z = 0 \quad (4)$$

qui possède deux racines réelles si son discriminant est positif, soit :

$$\Delta = d^2 - k d^2 \left(\frac{k}{4} d^2 - \Delta z \right) > 0$$

D'où on tire

$$\Delta z > \frac{k d^2}{4} - \frac{1}{k}$$

3. Une augmentation de z_A conduit à une augmentation de i_0 si $\frac{di_0}{dz_A} > 0$. Or, d'après les propriétés des fonctions composées et des fonctions réciproques, on a :

$$\begin{aligned} \frac{di_0}{dz_A} &= \frac{di_0}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dz_A} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{di_0}} \frac{d\alpha}{dz_A} \\ &= -\sin^2 i_0 \frac{d\alpha}{dz_A} \end{aligned}$$

La condition devient donc $\frac{d\alpha}{dz_A} < 0$

En dérivant l'équation (4) par rapport à z_A on obtient :

$$\frac{k}{4}d^2 \cdot 2\alpha \frac{d\alpha}{dz_A} - \frac{d\alpha}{dz_A}d - 1 = 0$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dz_A} = \frac{1}{\frac{kd^2\alpha}{2} - d} < 0$$

Finalement on en déduit la condition

$$\frac{k d \alpha}{2} < 1 \quad \text{soit} \quad \alpha < \frac{2}{k d}$$

ou encore

$$\tan i_0 > \frac{k d}{2}$$

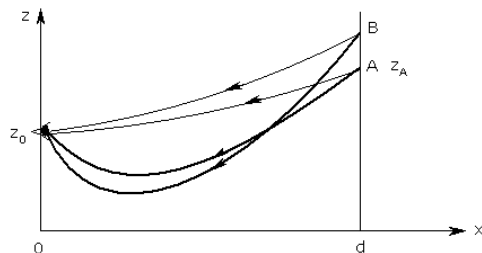
4. Les deux paraboles P_1 et P_2 correspondent aux deux solutions α_1 et α_2 de l'équation (4) :

$$P_1 : \alpha_1 = \frac{2}{k d} + \frac{2}{k d^2} \sqrt{\Delta} > \frac{2}{k d}$$

$$P_2 : \alpha_2 = \frac{2}{k d} - \frac{2}{k d^2} \sqrt{\Delta} < \frac{2}{k d}$$

Pour P_1 la condition n'est pas vérifiée ; elle l'est pour P_2 .

5. Les rayons *fins* donnent l'image droite car les rayons venant des points A et B ne se croisent pas. Ceux tracés en gras représentent l'image renversée pour laquelle les rayons de A et B se croisent. L'image renversée est le mirage inférieur.



6. Il s'agit d'un mirage supérieur. Au dessus de l'eau froide l'air est plus chaud. Par rapport à la situation précédente, le gradient de température et donc celui d'indice sont en sens opposés et les rayons s'incurvent vers le bas, ce qui a permis de voir le phare situé à 120 km.

Problème 2

1. La dimension de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ s'obtient à partir de la loi de NEWTON qui donne la force entre deux masses m_1 et m_2 distantes de r :

$$F = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

On a ainsi pour la dimension de $\mathcal{G}$:

$$[\mathcal{G}] = \frac{[F r^2]}{[m_1 m_2]} = \frac{\text{MLT}^{-2} \cdot \text{L}^2}{\text{M}^2} = \text{M}^{-1} \text{L}^3 \text{T}^{-2}$$

Pour la grandeur $u = \frac{2M\mathcal{G}}{rc^2}$, on a donc la dimension :

$$[u] = \frac{\text{M} \cdot \text{M}^{-1} \text{L}^3 \text{T}^{-2}}{\text{L} (\text{LT}^{-1})^2} = 1$$

Ce qui signifie que u est sans dimension.

2. Dans les applications numériques, on prendra pour r le rayon des objets célestes, ce qui permettra d'atteindre u à la surface de ces corps.

Les valeurs numériques utilisées et les valeurs de u sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

corps	M (kg)	r (m)	u
Terre	5.98×10^{24}	$6,38 \times 10^6$	$1,39 \times 10^{-9}$
Soleil	1.99×10^{30}	$6,98 \times 10^8$	$4,24 \times 10^{-6}$
Étoile à neutrons	4×10^{30}	10^4	0,6

Ces valeurs laissent suggérer qu'on aura pas besoin de relativité générale à la surface de la Terre et du Soleil, alors que cette théorie deviendra nécessaire à la surface de l'étoile à neutrons.

Problème 3

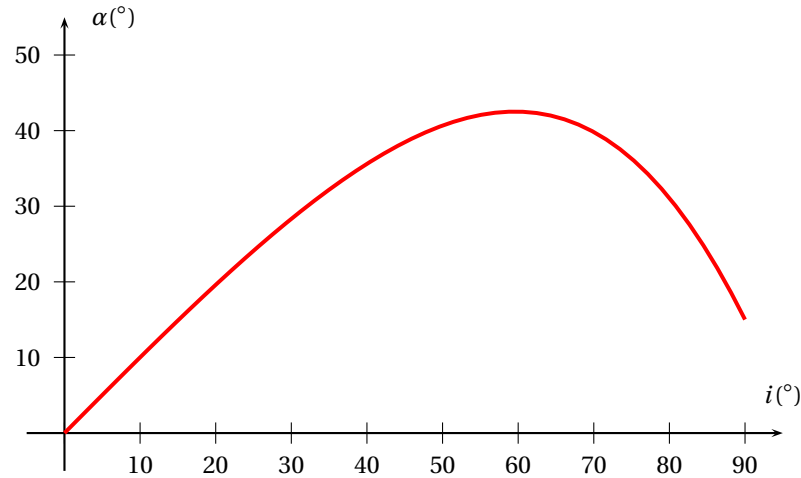
1. Lois de Snell-Descartes : voir cours.

Angle limite de réfraction totale eau/air : $\Lambda = \arcsin(1/n) = 48,6^\circ$.

2. Réfraction dans une goutte d'eau.

(a) Pourquoi le rayon réfracté en A est-il dans le plan de la figure ?

Le rayon incident ($x'A$) et la normale au dioptre (OA) définissent le plan d'incidence, qui est aussi le plan de la figure. D'après les lois de Descartes, le rayon réfracté en A est dans ce plan d'incidence.



Problème 4

I- Relation de conjugaison pour le dioptré sphérique

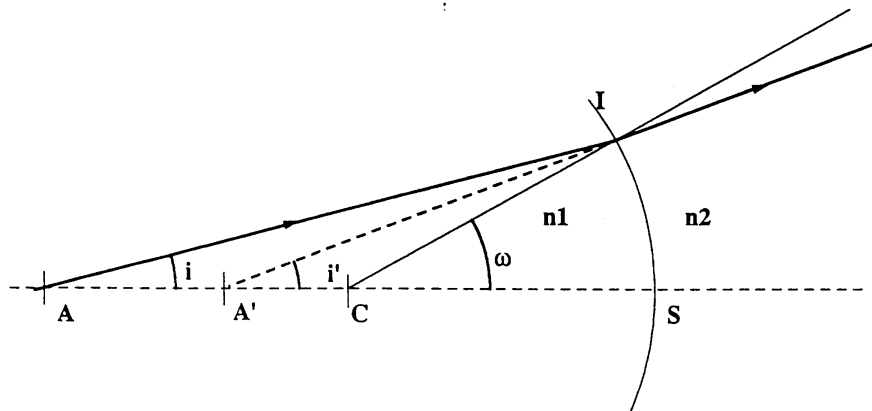


Figure 1

1. Le plan de la figure contient la normale au dioptré en I (c'est la droite IC) et le rayon incident. Il s'agit donc du plan d'incidence. D'après la loi de DESCARTES pour la réfraction, le rayon transmis est dans le plan d'incidence donc dans le plan de la figure.

2. Dans le triangle IAC, la somme des angles vaut :

$$i_1 + i + \pi - \omega = \pi \text{ d'où } i_1 = \omega - i$$

3. Le même raisonnement que précédemment conduit à :

$$i_2 = \omega - i'$$

4. La loi de DESCARTES pour la réfraction impose : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ Dans le cas des petits angles, on a $n_1 i_1 = n_2 i_2$ où les angles sont exprimés en radian.

5. En reprenant les relations précédentes, on arrive à :

$$n_1 (\omega - i) = n_2 (\omega - i')$$

6. En orientant les axes comme indiqué sur la figure, on a dans les triangles rectangle en H :

$$\frac{\overline{IH}}{\overline{HA}} = \tan i; \frac{\overline{IH}}{\overline{HA'}} = \tan i'; \frac{\overline{IH}}{\overline{HC}} = \tan \omega$$

En supposant que H est confondu avec S et pour des petits angles exprimés en radian, on arrive à :

$$\frac{\overline{IS}}{\overline{SA}} = i; \frac{\overline{IS}}{\overline{SA'}} = i'; \frac{\overline{IS}}{\overline{SC}} = \omega$$

7. En reprenant les expressions des angles et la relation ci-dessus, on obtient :

$$n_1 \left(\frac{\overline{IS}}{\overline{SC}} - \frac{\overline{IS}}{\overline{SA}} \right) = n_2 \left(\frac{\overline{IS}}{\overline{SC}} - \frac{\overline{IS}}{\overline{SA'}} \right)$$

ce qui conduit, après simplification par $\overline{IS}$, à la relation cherchée :

$$n_1 \left[\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{1}{\overline{SC}} \right] = n_2 \left[\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SC}} \right]$$

Dans le cas d'un dioptré plan, le centre C se trouve rejeté à l'infini et la quantité $\frac{1}{\overline{SC}}$ tend vers zéro, ce qui conduit à la relation de conjugaison du dioptré plan :

$$n_1 \frac{1}{\overline{SA}} = n_2 \frac{1}{\overline{SA'}}$$

II- Relation de conjugaison pour la lentille plan-convexe

1. Cas particulier de la lentille plan-convexe

- a. La relation de conjugaison du dioptré sphérique s'écrit ici pour le premier dioptré qui conjugue A et A₁ :

$$\left[\frac{1}{\overline{S_1 A}} - \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \right] = n \left[\frac{1}{\overline{S_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \right] \quad (5)$$

- b. On applique maintenant le relation de conjugaison du dioptré plan pour le couple A₁, A' :

$$n \frac{1}{\overline{P_1 A_1}} = \frac{1}{\overline{P_1 A'}} \quad (6)$$

2. Position des foyers

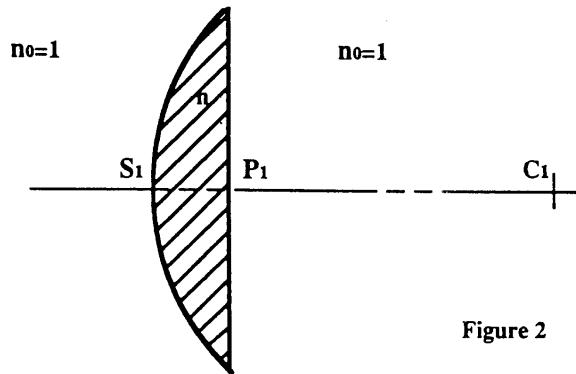


Figure 2

- a. On considère le cas particulier du point A=F dont l'image à travers la lentille est à l'infini sur l'axe. Les équations (5) et (6) s'écrivent alors :

$$\left[\frac{1}{\overline{S_1 F}} - \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \right] = n \left[\frac{1}{\overline{S_1 B_1}} - \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \right]$$

$$n \frac{1}{\overline{P_1 B_1}} = 0$$

La seconde équation implique que B₁ est à l'infini et donc que $\frac{1}{\overline{S_1 B_1}}$ tende vers zéro. La première équation ci-dessus devient alors :

$$\frac{1}{\overline{S_1 F}} = \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} - n \frac{1}{\overline{S_1 C_1}}$$

ce qui s'écrit encore $\boxed{\frac{1}{\overline{S_1 F}} = \frac{\overline{S_1 C_1}}{1-n}}$

- b. On considère maintenant le cas particulier du point A à l'infini sur l'axe dont l'image à travers la lentille est A'=F'. Les équations (5) et (6) s'écrivent alors :

$$\left[-\frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \right] = n \left[\frac{1}{\overline{S_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \right]$$

$$n \frac{1}{\overline{P_1 A_1}} = \frac{1}{\overline{P_1 F'}}$$

La première équation conduit à : $\frac{n}{\overline{S_1 A_1}} = \frac{n-1}{\overline{S_1 C_1}}$

De la seconde équation, on tire : $\overline{P_1 F'} = \frac{\overline{P_1 A_1}}{n}$ et en exploitant la relation de CHASLES :

$$\overline{P_1 F'} = \frac{\overline{P_1 S_1}}{n} + \frac{\overline{S_1 A_1}}{n}$$

ce qui conduit à la relation cherchée :

$$\boxed{\overline{P_1 F'} = \frac{\overline{P_1 S_1}}{n} + \frac{1}{n-1} \overline{S_1 C_1}}$$

3. Approximation des lentilles minces :

- a. En remplaçant P₁ et S₁ par O les équation précédentes donnent :

$$\boxed{\overline{OF} = \frac{\overline{OC_1}}{1-n} \text{ et } \overline{OF'} = \frac{1}{n-1} \overline{OC_1}}$$

- b. On a donc $\overline{OF} = -\overline{OF'}$, ce qui montre que O est donc le milieu de [FF'].

4. Relation de conjugaison :

- a. Reprenons les équations (5) et (6) dans le cas général en tenant compte de p₁=S₁=O :

$$\left[\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OC_1}} \right] = n \left[\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OC_1}} \right]$$

$$n \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OA'}}$$

b. En reportant $\frac{n}{\overline{OA_1}}$ d'une équation dans l'autre, on obtient :

$$\left[\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OC_1}} \right] = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{n}{\overline{OC_1}}$$

En exploitant $\overline{OF'} = \frac{1}{n-1} \overline{OC_1}$ on obtient finalement l'équation de conjugaison des lentilles minces :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$