

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Partie A : OPTIQUE

Ce problème d'optique comprend deux parties indépendantes : focométrie et lunette astronomique achromatique.

La première partie concerne la mesure, par différentes méthodes, des distances focales de lentilles minces convergentes et divergentes. La seconde partie consiste à rechercher les conditions pour limiter l'aberration chromatique, c'est-à-dire les défauts de formation des images dus à la dispersion des verres des objectif et oculaire d'une lunette astronomique.

Les quatre figures de la partie « Optique » sont en page 6.

On considérera que les lentilles minces de ce problème sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss.

1. FOCOMETRIE

L'axe ($x'x$) d'un banc d'optique est orienté dans le sens de parcours de la lumière. On notera O_1 et O_2 les centres de deux lentilles (L_1) convergente et (L_2) divergente, A et A' les points sur l'axe optique d'un objet lumineux transverse AB et de son image A'B' par l'instrument.

1.1. Lentille convergente : (L_1) de centre O_1 et de distance focale f_1'

On exprimera f_1' et $\Delta f_1'$ à 0,1 cm près.

1.1.1. Méthode d'autocollimation

1.1.1.1. Décrire la méthode expérimentale dite « d'autocollimation » qui permet de mesurer la distance focale d'une lentille mince convergente.

1.1.1.2. Quand l'image $A'B'$ de l'objet AB est obtenue par cette méthode, la distance mesurée objet-lentille est de 20,2 cm. Les incertitudes absolues de lecture sur l'axe et de mise au point de l'image étant au total évaluées à 0,5 cm, exprimer la distance focale f'_1 de (L_1) et son incertitude absolue $\Delta f'_1$.

1.1.2. Formule de conjugaison de Descartes

L'objet réel AB placé à 35 cm de la lentille (L_1) donne une image nette $A'B'$ de cet objet sur un écran (E) situé à 46,5 cm de la lentille.

1.1.2.1. Déterminer la distance focale f'_1 de cette lentille.

1.1.2.2. Sachant que les incertitudes absolues sur les distances objet-lentille (incertitude de lecture) et lentille-écran (incertitudes de lecture et de netteté de l'image) sont respectivement évaluées à 0,4 cm et 0,8 cm, calculer l'incertitude absolue $\Delta f'_1$.

1.1.3. Méthode de Bessel

Un objet AB et un écran (E) sont fixes et distants de D . Entre l'objet et l'écran, on déplace la lentille (L_1) pour obtenir sur (E) une image nette $A'B'$.

1.1.3.1. On pose $p = \overline{O_1A}$. Montrer que si $D > D_{min}$, valeur minimale que l'on exprimera en fonction de f'_1 , alors il existe deux positions distinctes p_1 et p_2 (avec $|p_1| < |p_2|$) de (L_1) pour lesquelles une image nette se forme sur l'écran. Donner les expressions de p_1 et p_2 en fonction de D et f'_1 .

1.1.3.2. Si d représente la distance entre les deux positions de la lentille (L_1) quand $D > D_{min}$, montrer que la distance focale f'_1 s'exprime en fonction de D et d .

1.1.3.3. Déterminer l'incertitude absolue $\Delta f'_1$ de l'expression de f'_1 sachant que les incertitudes absolues de D et d sont respectivement notées par ΔD et Δd .

1.1.3.4. Calculer la distance focale f'_1 de (L_1) et son incertitude absolue $\Delta f'_1$ sachant que $D = (90 \pm 1)$ cm et $d = (30 \pm 1)$ cm.

1.1.4. Méthode de Silbermann

L'objet AB étant fixe, sa position sera prise comme origine sur l'axe optique. On cherche les positions de la lentille (L_1) et de l'écran (E) telles que le grandissement

transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -1$. La distance objet-écran est alors $D_0 \pm \Delta D_0$.

1.1.4.1. Utiliser la relation de conjugaison de Descartes et l'expression du grandissement pour obtenir f'_1 en fonction de D_0 .

1.1.4.2. On mesure $D_0 = 80,4$ cm avec une incertitude absolue de 0,5 cm comprenant la lecture et la mise au point de l'image pour ce grandissement. En déduire la distance focale f'_1 de (L_1) et son incertitude absolue $\Delta f'_1$.

1.1.4.3. La méthode de Silbermann peut-elle se déduire de la méthode de Bessel ? Justifier votre réponse.

1.1.5. Comparaison des méthodes

Parmi ces quatre méthodes quelle est celle qui vous semble la plus rapide à mettre en œuvre pour obtenir l'ordre de grandeur de f'_1 et celle qui vous permet la meilleure précision ?

1.2. Lentille divergente : (L_2) de centre O_2 et de distance focale f_2'

On exprimera f_2' à 0,1 cm près.

1.2.1. Théorème des vergences (formule des opticiens)

Pour déterminer la distance focale d'une lentille mince divergente (L_2), on accole celle-ci à une lentille mince convergente (L_0) de vergence $V_0 = 8 \text{ m}^{-1}$ et on utilise ce système mince $[(L_0) + (L_2)]$ pour obtenir d'un objet réel AB, une image réelle A'B', renversée, de même dimension que l'objet. La distance objet-image mesurée est égale à 1 m.

1.2.1.1. Déterminer la vergence V du système de lentilles accolées.

1.2.1.2. En déduire la vergence V_2 et la distance focale f_2' de la lentille (L_2) sachant que pour l'association $[(L_0) + (L_2)]$ nous avons : $V = V_0 + V_2$.

1.2.1.3. Les centres optiques des lentilles dites « accolées » sont en fait distants de $e = 0,5 \text{ cm}$. Evaluer à nouveau V_2 et f_2' à partir de cette formule de Gullstrand qui prend en compte la distance entre les centres optiques : $V = V_0 + V_2 - e V_0 V_2$.

1.2.2. Viseur à frontale fixe

Un viseur à frontale fixe est utilisé pour déterminer la distance focale f_2' de la lentille (L_2). On vise d'abord l'objet AB, on insère (L_2) entre l'objet et le viseur à une distance x de AB et enfin on doit reculer d'une distance D pour viser l'image A'B'.

1.2.2.1. À partir de la relation de conjugaison de Descartes, montrer que la distance focale f_2' s'exprime en fonction des distances x et D .

1.2.2.2. Sachant que $x = 30 \text{ cm}$ et $D = 16,5 \text{ cm}$, calculer f_2' .

1.2.3. Méthode de Badal

La méthode de Badal se déroule en deux étapes :

1ère étape : une lentille convergente (L) donne d'un objet ponctuel A situé au foyer objet F de cette lentille, une image rejetée à l'infini. Une seconde lentille convergente (L_0) de distance focale connue f_0' est disposée à la suite de (L) à une distance supérieure à f_0' . L'image finale ponctuelle A' se trouve sur un écran (E) situé au foyer image F' de (L_0).

2ème étape : la lentille divergente (L_2), de distance focale f_2' inconnue, est positionnée dans le plan focal objet de (L_0). Pour obtenir la nouvelle image nette A', il faut éloigner (E), de (L_0), d'une distance D .

1.2.3.1. En appliquant la relation de conjugaison de Newton à la lentille (L_0), déterminer la relation donnant l'expression de la distance focale f_2' en fonction des distances f_0' et D .

1.2.3.2. Pour les distances $f_0' = 12,5 \text{ cm}$ et $D = 6,5 \text{ cm}$, calculer f_2' .

2. LUNETTE ASTRONOMIQUE ACHROMATIQUE

La vergence V d'une lentille mince est donnée par la relation algébrique suivante :

$$V = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

où n est l'indice de réfraction du verre constituant la lentille et R_1 et R_2 , les rayons de courbure algébriques ($R_x = \overline{S_x C_x}$) respectivement des faces avant et arrière de la lentille.

L'indice n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad A \text{ et } B \text{ étant deux constantes positives.}$$

Pour un verre de type crown : $A = 1,515$ et $B = 3,5 \times 10^3 \text{ nm}^2$.

On définit la constringence ν et le pouvoir dispersif K d'un verre par : $\nu = \frac{1}{K} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, où n_F, n_D et n_C sont les indices du verre pour les radiations F (bleu : $\lambda_F = 486 \text{ nm}$), D (jaune : $\lambda_D = 589 \text{ nm}$) et C (rouge : $\lambda_C = 656 \text{ nm}$).

On notera f'_F, f'_D et f'_C les distances focales images et F'_F, F'_D et F'_C les foyers images de la lentille pour les radiations F, D et C respectivement.

2.1. Constringence, pouvoir dispersif et distance focale d'une lentille d'un verre crown

Une lentille mince (L), en verre crown, est biconvexe avec les rayons de courbure R_1 et R_2 tels que $|R_1| = 90 \text{ cm}$ et $|R_2| = 150 \text{ cm}$. Le diamètre de (L) est : $\mathcal{D} = 8 \text{ cm}$.

2.1.1. Calculer, avec le nombre de chiffres significatifs correct, les indices n_F, n_D et n_C . En déduire la constringence ν et le pouvoir dispersif K pour ce verre crown.

2.1.2. Déterminer la distance focale moyenne f'_D de (L).

2.2. Aberrations chromatiques principales des lentilles minces

Deux lentilles minces (L_1) convergente (Figure 1) et (L_2) divergente (Figure 2) sont éclairées, parallèlement à l'axe optique, par un faisceau de lumière blanche.

2.2.1. Reproduire les figures 1 et 2 et tracer le cheminement des rayons lumineux bleu et rouge de longueurs d'onde respectives (λ_F) et (λ_C) émergeant des lentilles (L_1) et (L_2), en indiquant pour chacune de ces deux lentilles la position relative des foyers F'_F et F'_C sur l'axe optique.

2.2.2. Aberrations chromatiques longitudinale et transversale

2.2.2.1. L'aberration chromatique longitudinale d'une lentille est définie par la distance algébrique $A_L = \overline{F'_F F'_C}$ qui sépare les foyers bleu F'_F et rouge F'_C .

Exprimer A_L pour la lentille convergente (L), en fonction de la constringence ν et de la distance focale moyenne f'_D , en supposant que $f'_F f'_C \approx f'^2_D$. Commentaire.

Calculer numériquement A_L .

2.2.2.2. On définit l'aberration chromatique transversale A_T d'une lentille comme le rayon de la plus petite tache lumineuse produite par les faisceaux bleu et rouge, interceptée par un écran disposé normalement à l'axe optique.

Exprimer A_T pour (L), en fonction de la constringence ν et de $\mathcal{D}$, en supposant de plus que f'_D est quasiment la moyenne arithmétique de f'_F et f'_C . Commentaire.

Calculer la valeur de A_T .

2.3. Objectif achromatique

On réalise un objectif achromatique mince, en accolant la lentille (L) précédente biconvexe, de rayons de courbures R_1 et R_2 en verre crown avec une lentille (L'), plan-concave en verre de flint, de sorte que les faces en contact aient le même rayon de courbure R_2 .

Les indices de réfraction des deux verres sont donnés par la loi de Cauchy :

- lentille (L), en verre crown : $n_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2}$ avec $A_1 = 1,515$ et $B_1 = 3,5 \times 10^3 \text{ nm}^2$
- lentille (L'), en verre flint : $n_2 = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2}$ où A_2 et B_2 sont à déterminer.

2.3.1. Exprimer les vergences V_1 , V_2 respectivement des lentilles (L), (L') en fonction des constantes A_1, A_2, B_1, B_2 , des rayons R_1, R_2 et de λ . En déduire la vergence $V = V_1 + V_2$ des deux lentilles accolées.

2.3.2. Déterminer l'expression de $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$. Que doit valoir cette expression pour supprimer l'aberration chromatique ? En déduire une relation entre B_1, B_2, R_1 et R_2 puis exprimer la vergence V en fonction de A_1, A_2, R_1 et R_2 .

2.3.3. Calculer les constantes A_2 et B_2 pour une vergence V de l'objectif égale à $0,5 \text{ m}^{-1}$.

2.4. Oculaire achromatique

Soient deux lentilles biconvexes ($\mathcal{L}_1$) et ($\mathcal{L}_2$), de focales images respectives f'_1 et f'_2 , taillées dans le même verre flint d'indice n_2 , de même axe optique, dont les deux dioptries, pour chacune d'elles, ont en valeur absolue le même rayon, R'_1 pour ($\mathcal{L}_1$) et R'_2 pour ($\mathcal{L}_2$). Les deux lentilles placées à une distance d' l'une de l'autre doivent permettre de réaliser un oculaire achromatique (Figure 3).

2.4.1. Déterminer, en fonction de R'_1, R'_2, A_2, B_2, d' et λ , les vergences V'_1 de ($\mathcal{L}_1$), V'_2 de ($\mathcal{L}_2$) et V' de cet oculaire en appliquant la formule de Gullstrand :

$$V' = V'_1 + V'_2 - d'V'_1V'_2.$$

2.4.2. Calculer $\frac{\partial V'}{\partial \lambda}$ et en déduire les facteurs numériques k_1 et k_2 de l'expression :

$$\frac{\partial V'}{\partial \lambda} = \frac{k_1(n_2 - 1)B_2}{R'_1R'_2\lambda^3}(f'_1 + f'_2 + k_2d').$$

2.4.3. Quelles doivent être les relations, d'une part entre f'_1 et f'_2 si $R'_1 = 3R'_2$ et d'autre part entre d' et f'_2 si on veut éliminer l'aberration chromatique ?

2.4.4. Calculer, dans les conditions de la question précédente, la valeur de d' pour avoir un oculaire de vergence $V' = 75 \text{ m}^{-1}$.

2.4.5. On définit respectivement par ($F_1 ; F'_1$) et ($F_2 ; F'_2$) les foyers principaux objet et image pour les lentilles ($\mathcal{L}_1$) et ($\mathcal{L}_2$).

2.4.5.1. Déterminer le foyer objet F (conjugué de F_2 dans ($\mathcal{L}_1$)) et le foyer image F' (conjugué de F'_1 dans ($\mathcal{L}_2$)) pour ce doublet en exprimant $\overline{F_1F}$ et $\overline{F'_2F'}$ en fonction de d' .

2.4.5.2. En prenant comme référence la distance d' entre les deux lentilles, reproduire la Figure 3 en positionnant les six foyers objet et image pour ce doublet.

2.5. Lunette achromatique

L'objectif achromatique $\{(L)+(L')\}$, assimilé à une lentille mince unique, est associé à cet oculaire $\{(\mathcal{L}_1)+(\mathcal{L}_2)\}$ pour réaliser une lunette astronomique (Figure 4).

2.5.1. Calculer le grossissement angulaire de cette lunette. (On assimilera l'oculaire à une lentille unique de vergence $V' = 75 \text{ m}^{-1}$).

2.5.2. Reproduire la Figure 4 et tracer le chemin suivi par le rayon incident (sous l'angle α) à travers et à la sortie de l'oculaire. On précisera les foyers et rayons secondaires utiles à la construction.

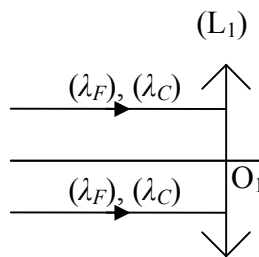


Figure 1

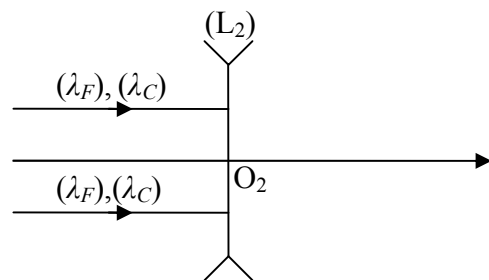


Figure 2

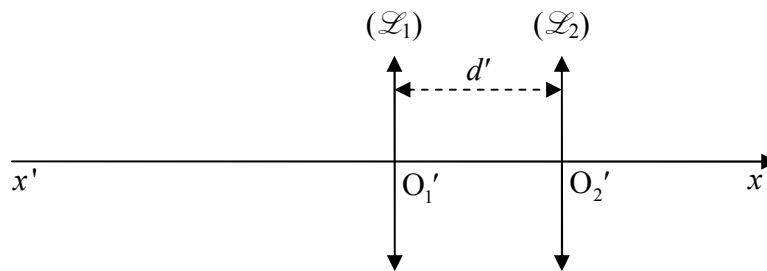


Figure 3

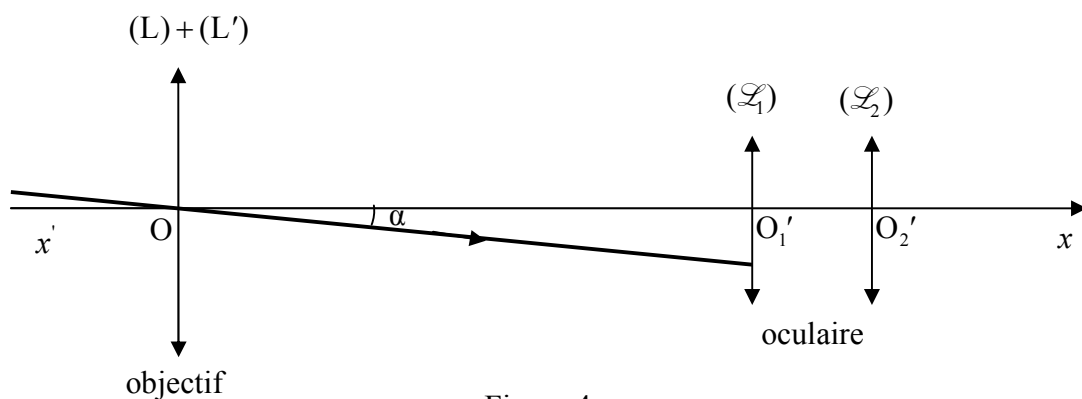


Figure 4